

Mathematische Methoden der Physik

Teil 2:

Vektoranalysis

KARL-HEINZ LOTZE

Stand: 28. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Linienintegrale	5
1.1	Die mechanische Arbeit als Linienintegral	5
1.2	Linienintegral und Wegabhängigkeit. Beispiele	6
1.3	Linienintegral und Wegunabhängigkeit. Beispiele	8
1.4	Berechnung des Potentials	12
1.5	Der ebene Winkel als Linienintegral	14
2	Oberflächenintegrale	21
2.1	Das bestimmte Integral oder: die ebene Fläche als Linienintegral	21
2.2	Die ebene Fläche als Doppelintegral	21
2.3	Oberflächenintegrale gekrümmter Flächen	23
2.4	Der Raumwinkel als Oberflächenintegral	25
3	Volumenintegrale	33
3.1	Das Volumen als Doppelintegral	33
3.2	Das Dreifachintegral	35
3.3	Volumenintegrale: Beispiele	35
4	Intermezzo: Krummlinige Orthogonalkoordinaten	39
4.1	Ebene Polarkoordinaten (r, φ)	39
4.2	Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z)	44
4.3	Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)	46
4.4	Zusätzlicher Inhalt: Die Jacobi-Determinante	51
5	Der Greensche Satz	53
5.1	Herleitung des Greenschen Satzes	53
5.2	Beispiele	55
6	Der Stokessche Satz, Zirkulation und Rotation	57
6.1	Die Zirkulation eines Vektorfeldes	57
6.2	Beispiele für ebene Strömungen	58
6.3	Verallgemeinerung des Greenschen Satzes auf 3 Dimensionen	61
6.4	Zur Bedeutung der Rotation	64
6.5	Beispiele für den Stokesschen Satz	66
7	Der Gaußsche Satz, Fluß und Divergenz	69
7.1	Der Fluß eines Vektorfeldes und der Gaußsche Satz für die Ebene	69
7.2	Beispiele für ebene Strömungen	72
7.3	Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes auf drei Dimensionen	74
7.4	Beispiele für den Gaußschen Satz	77

8	Differentialoperatoren in krummlinigen Orthogonalkoordinaten	83
8.1	Vektorkomponenten	83
8.2	Beispiele	84
8.3	Zusammenfassung und Formelsammlung	85
8.4	Zusätzlicher Inhalt: Beziehungen zwischen Vektor-Differentialoperatoren	87
9	Zusätzlicher Inhalt: Die Symbole von Kronecker und Levi-Civita	89
9.1	Skalarprodukt und Divergenz	89
9.2	Vektorprodukt und Rotation	92

1 Linienintegrale

1.1 Die mechanische Arbeit als Linienintegral

Wir gehen der Frage nach, wie sich die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

mit der Zeit ändert. Es ist

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m}{2} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) = m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}.$$

Mit der Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ und dem Newtonschen Grundgesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ wird

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Es resultiert eine Bilanzgleichung für die kinetische Energie. Diese besagt, daß deren zeitliche Änderung gleich der Leistung der Kraft ist. Die Änderung der kinetischen Energie im Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ ist

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$

Für die eindimensionale, durch die Zeit t parametrisierte Bewegung ist

$$dx(t) = \frac{dx}{dt} dt.$$

Dann ist die Änderung der kinetischen Energie zwischen dem Anfangspunkt $x_1 = x(t_1)$ und dem Endpunkt $x_2 = x(t_2)$ der Bewegung,

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt = \int_{x_1}^{x_2} F dx = W,$$

die Arbeit, welche die Kraft F bei der Verschiebung etwa eines Massenpunktes von x_1 nach x_2 verrichtet („Arbeit = Kraft $\times$ Weg“).

In drei Dimensionen haben wir

$$d\vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

und damit allgemeiner das *Linien- (Kurven- oder Weg-)Integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F} d\vec{r} = W.$$

Darin bezeichnet C die Kurve im Raum, die den Anfangspunkt P_1 mit dem Endpunkt P_2 verbindet.

Offensichtlich wird keine Arbeit verrichtet ($W = 0$), wenn $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$ ist, die Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{v}$ also aufeinander senkrecht stehen. Dies ist beispielsweise bei einer horizontalen Bewegung im homogenen Schwerefeld der Erde oder im Magnetfeld (Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{v}$) der Fall.

Explizit können wir für ein Vektorfeld

$$\vec{F} = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k} \quad \text{mit} \quad d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

auch

$$W = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$

schreiben.

Interpretation 1: $\int_C \vec{F} d\vec{r}$

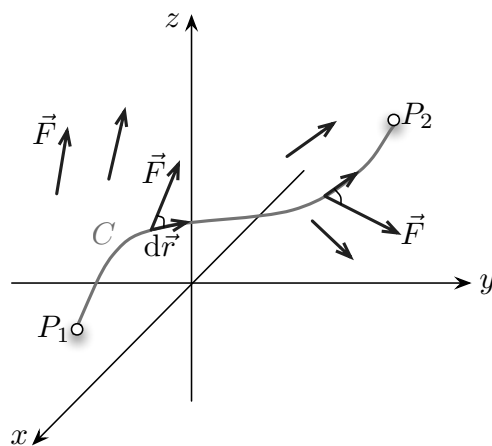
Wir haben ein Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ im ganzen Raum und eine Kurve C mit ihrem Anfangspunkt P_1 und ihrem Endpunkt P_2 . Das Linienintegral stellt eine Summation aller Skalarprodukte $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, gebildet an allen Punkten dieser Kurve C mit den Vektoren $\vec{F}$ an diesen Punkten, dar.

Interpretation 2: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

Wir parametrisieren die Kurve C durch die Zeit t . Der Massenpunkt ist zur Zeit

$t_1 \leq t \leq t_2$ am Ort $\vec{r}(t)$ und „spürt“ dort die Kraft $\vec{F}[x(t), y(t), z(t)]$, auch wenn das Kraftfeld selbst nicht explizit zeitabhängig ist.

Das Linienintegral ist unabhängig von der physikalischen Interpretation.



Für die Ausrechnung von Linienintegralen müssen diese durch *eine* unabhängige Variable ausgedrückt (parametrisiert) werden.

Dazu gibt es im allgemeinen mehrere Möglichkeiten.

1.2 Linienintegral und Wegabhängigkeit. Beispiele

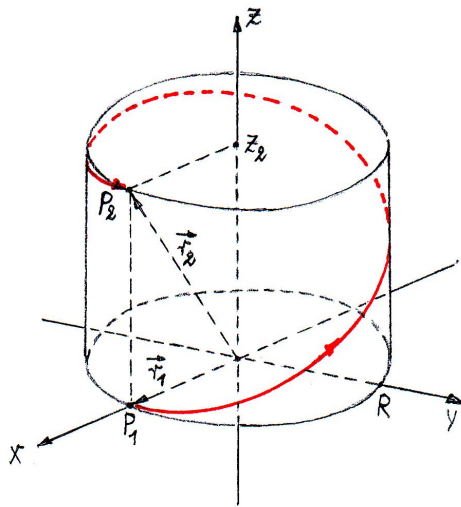
Wir berechnen das Linienintegral

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

für zwei Kraftfelder und je zwei Wege.

1. Schritt Wir wählen zwei Wege $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$, die durch die Zeit t parametrisiert werden, nämlich:

Weg 1:



Es sei

$$\vec{r} = R \cos \omega t \cdot \vec{i} + R \sin \omega t \cdot \vec{j} + ct \cdot \vec{k}$$

mit

$$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}, \quad c = \text{const.}$$

Anfangspunkt:

$$\vec{r}_1 = R \cdot \vec{i}, \quad r_1 = R.$$

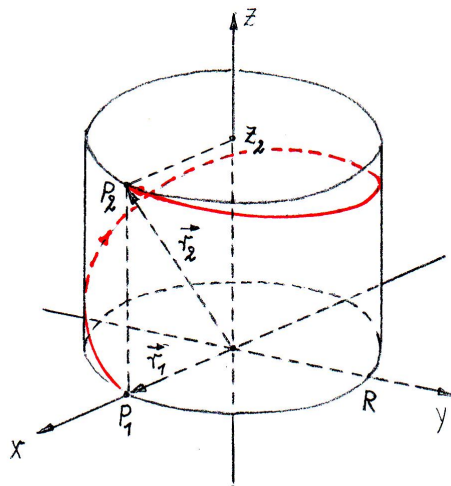
Endpunkt:

$$\vec{r}_2 = R \cdot \vec{i} + \frac{2\pi c}{\omega} \vec{k}, \quad r_2 = \sqrt{R^2 + \frac{4\pi^2 c^2}{\omega^2}}.$$

Diese Parametrisierung beschreibt zusammen mit dem Anfangs- und Endpunkt eine Windung einer Kreisspirale. Durch die Ableitung des Ortsvektors nach dem Parameter t gelangen wir zu der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \omega R(-\sin \omega t \cdot \vec{i} + \cos \omega t \cdot \vec{j}) + c \cdot \vec{k}.$$

Weg 2:



Nun sei

$$\vec{r} = R \cos \omega t \cdot \vec{i} - R \sin \omega t \cdot \vec{j} + ct \cdot \vec{k}$$

mit

$$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}.$$

Dieser Weg hat den gleichen Anfangs- und Endpunkt wie Weg 1 und beschreibt die Kreisspirale mit entgegengesetztem Windungssinn. Die zugehörige Geschwindigkeit ist

$$\vec{v} = -\omega R(\sin \omega t \cdot \vec{i} + \cos \omega t \cdot \vec{j}) + c \cdot \vec{k}.$$

2. Schritt Wir wählen zwei Kraftfelder $\vec{F}$ und berechnen für jedes der beiden die Arbeit W entlang beider Wege.

Kraftfeld 1:

$$\vec{F} = \alpha(y\vec{i} - x\vec{j}) + f_0\vec{k}$$

- Weg 1: Entlang des ersten Weges findet der Massenpunkt zu verschiedenen Zeiten t das Kraftfeld

$$\vec{F} = \alpha R(\sin \omega t \cdot \vec{i} - \cos \omega t \cdot \vec{j}) + f_0\vec{k}$$

vor, und damit ist

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\alpha\omega R^2 + cf_0 = \text{const.}$$

Die Arbeit entlang des ersten Weges ist

$$W_{(1)} = \int_0^{2\pi/\omega} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{2\pi}{\omega}(-\alpha\omega R^2 + cf_0) = -2\pi\alpha R^2 + f_0 z_2.$$

- Weg 2: Auf seinem zweiten Weg durch das gleiche Kraftfeld erfährt der Massenpunkt die Einwirkung anderer Kraftvektoren als auf dem ersten Weg, nämlich

$$\vec{F} = -\alpha R(\sin \omega t \cdot \vec{i} + \cos \omega t \cdot \vec{j}) + f_0 \cdot \vec{k}$$

und damit

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \alpha\omega R^2 + cf_0 = \text{const.}$$

Die Arbeit berechnen wir zu

$$W_{(2)} = \frac{2\pi}{\omega}(\alpha\omega R^2 + cf_0) = 2\pi\alpha R^2 + f_0 z_2.$$

Wir stellen fest, daß $W_{(1)} \neq W_{(2)}$ ist. Je nach Weg ist die Arbeit unterschiedlich und somit *wegabhängig*.

1.3 Linienintegral und Wegunabhängigkeit. Beispiele

Kraftfeld 2: Das zweite Kraftfeld ist das Zentralkraftfeld

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

für das – je nach der Bedeutung von α – das Newtonsche Gravitationsfeld und das Coulomb-Feld Beispiele sind.

- Weg 1: Die Kraftvektoren entlang des ersten Weges sind

$$\vec{F} = \alpha \frac{R \cos \omega t \cdot \vec{i} + R \sin \omega t \cdot \vec{j} + ct \cdot \vec{k}}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}}.$$

Damit folgt

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\alpha c^2 t}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}},$$

und die Arbeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned} W_{(1)} &= \int_0^{2\pi/\omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt \\ &= -\alpha \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2 t^2}} \Big|_0^{2\pi/\omega} \\ &= \alpha \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{4\pi^2 c^2}{\omega^2}}} \right) = \alpha \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Wir stellen fest, daß das Resultat ausschließlich von den Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes abhängt.

- Weg 2: Dieses Kraftfeld ist mit der Parametrisierung des Weges durch die Zeit t

$$\vec{F} = \alpha \frac{R \cos \omega t \cdot \vec{i} - R \sin \omega t \cdot \vec{j} + ct \cdot \vec{k}}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}}$$

und damit

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\alpha c^2 t}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}}.$$

Da $\vec{F} \cdot \vec{v}$ und ebenso die Anfangs- und Endpunkte für beide Wege übereinstimmen, erhalten wir für dieses Kraftfeld schließlich

$$\underline{W_{(2)} = W_{(1)}}.$$

Es ist offensichtlich, daß die Arbeit für die beiden unterschiedlichen Wege gleich und somit *wegunabhängig* ist. Da die Wege für beide Kraftfelder gleich sind, muß es an den Kraftfeldern liegen, ob die Arbeit wegunabhängig oder wegunabhängig ist.

Ein differentielles Kriterium für Wegunabhängigkeit Es entsteht die Frage, ob wir es den Kraftfeldern „ansetzen“ können, daß die Arbeit für *alle* Wege, die P_1 und P_2 verbinden, wegunabhängig ist oder nicht.

Falls für *alle* Geschwindigkeiten $\vec{v}$ eine skalare Funktion $U(\vec{r})$ existiert, sodaß

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt}$$

ist (das Minuszeichen ist Konvention), wird

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} \, dt \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} dU = -(U_2 - U_1) \quad \text{mit} \quad U_i \equiv U(P_i). \end{aligned}$$

Die Arbeit ist dann nur abhängig vom Wert der skalaren Funktion $U(\vec{r})$ am Anfangs- und Endpunkt des Weges.

Für einen *geschlossenen Weg* ist

$$W = -\oint_C dU = -\left(\int_{P_1}^{P_2} dU + \int_{P_2}^{P_1} dU\right) = 0.$$

Zudem ist nach der Kettenregel („Reisgleichung“)

$$\frac{dU}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad } U.$$

Der Vergleich mit

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt}$$

ergibt den Zusammenhang

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad } U}.$$

In Komponenten aufgeschrieben, ist

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{und} \quad F_3 = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

sodaß das Differential ($F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$) *vollständig* ist. Aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen ist das Kriterium dafür

$$\boxed{\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}}.$$

Mit Hilfe dieses *differentiellen Kriteriums* können wir entscheiden, ob die Arbeit in einem Kraftfeld wegunabhängig ist. Soll dies der Fall sein, müssen alle drei Bestandteile dieses Kriteriums simultan erfüllt sein.

Resultat:

Wenn der Zusammenhang $\vec{F} = -\text{grad } U$ besteht, ist das Linienintegral (Arbeit) $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ für *alle* Wege wegunabhängig. In diesem Fall ist die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges immer Null.

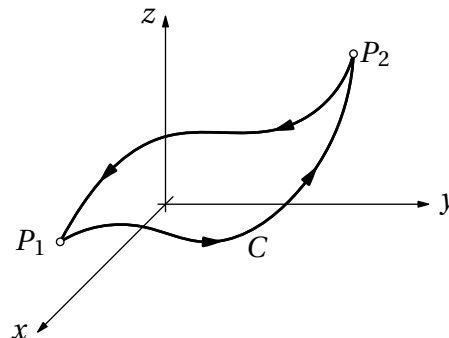
Solche Vektorfelder (Kräfte) heißen *konservativ*, denn es gilt $W = T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1)$, sodaß $T_2 + U_2 = T_1 + U_1$ eine *Erhaltungsgröße* ist. Die skalare Größe U heißt „potentielle Energie“ oder „Potential“¹.

Es soll nun das differentielle Kriterium für die beiden oben behandelten Beispiele von Kraftfeldern untersucht werden.

Kraftfeld 1: Die Komponenten dieses Kraftfeldes sind $F_1 = \alpha y$, $F_2 = -\alpha x$, $F_3 = f_0$.

Es ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \alpha, \quad \text{jedoch} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\alpha.$$



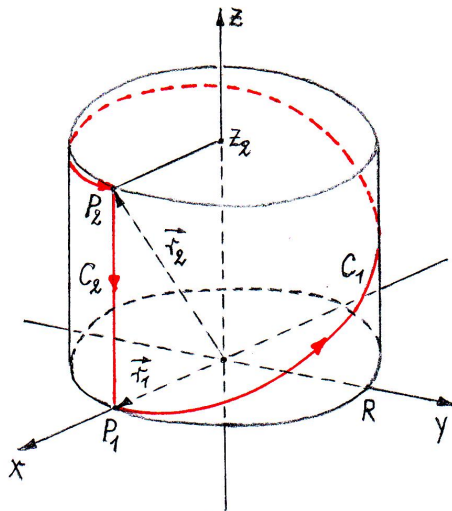
¹Strenggenommen ist das Potential die potentielle Energie pro Masse.

Das differentielle Kriterium ist verletzt, $\vec{F}$ ist somit nicht konservativ und es existiert kein Potential.

Um die Arbeit auf einem geschlossenen Weg zu berechnen, wählen wir den ersten Weg (siehe oben) und schließen diesen durch die gerade Verbindung

$$C_2: \quad \vec{r}(t) = R\vec{i} + ct\vec{k}$$

von P_2 nach P_1 .



Wie bereits berechnet, ist die Arbeit entlang der Kurve C_1

$$W_{(1)} = -2\pi\alpha R^2 + f_0 z_2.$$

Entlang des Weges C_2 gilt $\vec{v} = c\vec{k}$ und $\vec{F}\vec{v} = cf_0$. Damit ist die Arbeit entlang des zweiten Weges, dessen Anfangspunkt P_2 ist,

$$W_{(2)} = \int_{2\pi/\omega}^0 \vec{F} \cdot \vec{v} dt = -cf_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = -f_0 z_2.$$

Zusammen: Es ist erwartungsgemäß

$$\begin{aligned} W &= \oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt + \int_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= -2\pi\alpha R^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Kraftfeld 2: Das Zentralkraftfeld hat die Komponenten

$$F_1 = \alpha \frac{x}{r^3}, \quad F_2 = \alpha \frac{y}{r^3}, \quad F_3 = \alpha \frac{z}{r^3} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -3\alpha \frac{xy}{r^5} \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -3\alpha \frac{xy}{r^5} \quad \text{usw.}$$

Das differentielle Kriterium ist erfüllt, das Kraftfeld $\vec{F}$ ist konservativ und ein Potential existiert.

Wie bereits berechnet, ist die Arbeit entlang der Kurve C_1

$$W_{(1)} = \alpha \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Entlang des Weges $C_2: \vec{r}(t) = R\vec{i} + ct\vec{k}$ gilt wie für C_1

$$\vec{F} = \alpha \frac{R\vec{i} + ct\vec{k}}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}}, \quad \text{und damit wie für } C_1 \quad \vec{F}\vec{v} = \frac{\alpha c^2 t}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}}.$$

Es ist also

$$W_{(2)} = \int_{2\pi/\omega}^0 \vec{F}\vec{v} dt = -W_{(1)}$$

und zusammen $W_{(2)} + W_{(1)} = 0$.

1.4 Berechnung des Potentials

Es ergab sich aus den Rechnungen für das Zentralkraftfeld $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$$W = U_1 - U_2 = \alpha \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

also

$$U_1 \equiv U(P_1) = \frac{\alpha}{r_1} \quad \text{und} \quad U_2 \equiv U(P_2) = \frac{\alpha}{r_2}.$$

Allgemein hat dieses Kraftfeld das Zentralkraft-Potential

$$U = \frac{\alpha}{r} + U_0.$$

Das Potential ist stets nur bis auf eine *additive Konstante* bestimmt. Für alle $U_0 = \text{const}$ führen Potentiale der Form $\tilde{U} = U + U_0$ auf die gleiche Kraft, denn es ist

$$\vec{\tilde{F}} = -\text{grad } \tilde{U} = -\text{grad } (U + U_0) = -\text{grad } U = \vec{F}.$$

Man nennt diesen Sachverhalt *Eichfreiheit*; U_0 wird durch Eichung des Potentials festgelegt.

Beispiel: Zentralkraftpotential

Nur dann, wenn wir $U(\infty) \stackrel{!}{=} 0$ verlangen, ist $U_0 = 0$ und $U = \frac{\alpha}{r}$.

Falls das Kriterium für die Existenz eines Potentials erfüllt ist, wollen wir dieses nun berechnen. Das kann nach verschiedenen Verfahren geschehen.

Verfahren 1 Direkte Integration von $\vec{F} = -\text{grad } U$

Beispiel: Zentralkraftfeld

Aus

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_1 = -\alpha \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

folgt

$$U = -\alpha \int \frac{x \, dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \alpha \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} + f(y, z),$$

wobei bei der x -Integration die Variablen y und z festgehalten werden und diesbezüglich die noch unbekannte Funktion $f(y, z)$ eine Integrationskonstante ist. Aus diesem Resultat folgt

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\alpha \frac{y}{r^3} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Andererseits ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\alpha \frac{y}{r^3}.$$

Zusammen ergibt dies $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, also $f = f(z)$.

Weiterhin ist

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\alpha \frac{z}{r^3} + \frac{df}{dz}$$

und unabhängig davon

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\alpha \frac{z}{r^3}.$$

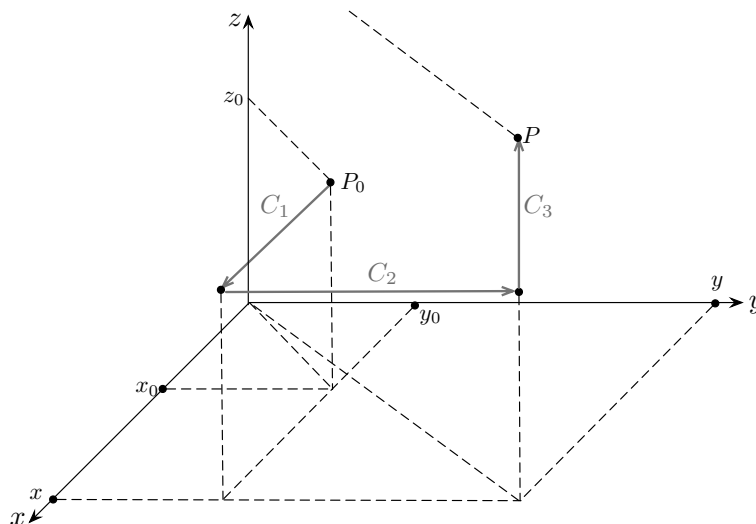
Damit ist $\frac{df}{dz} = 0$, also $f = \text{const} = U_0$, und insgesamt

$$U = \frac{\alpha}{r} + U_0.$$

Verfahren 2 Wahl eines speziellen Integrationsweges

Wenn es so ist, daß die Arbeit W beim Transport vom Anfangspunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ zum Endpunkt $P(x, y, z)$ nicht vom Weg abhängt, sondern nur von der Lage dieser beiden Punkte, können wir einen möglichst einfachen Weg wählen, der die Punkte P_0 und P verbindet. Dabei sind Wegstücke parallel zu den Koordinatenachsen oft am zweckmäßigsten,

$$U = \int_C dU = - \int_C \vec{F} d\vec{r} = - \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} - \int_{C_3} \vec{F} d\vec{r}.$$



Die Beschreibung der drei Teilwege ist

$$C_1: \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad dy = 0 = dz, \quad \vec{F} d\vec{r} = F_1(x, y_0, z_0) dx$$

$$C_2: \quad x = \text{const}, \quad z = z_0, \quad dx = 0 = dz, \quad \vec{F} d\vec{r} = F_2(x, y, z_0) dy$$

$$C_3: \quad x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad dx = 0 = dy, \quad \vec{F} d\vec{r} = F_3(x, y, z) dz.$$

Wir erhalten also nach Umbenennung der Integrationsvariablen

$$U = - \int_{x_0}^x F_1(\xi, y_0, z_0) d\xi - \int_{y_0}^y F_2(x, \eta, z_0) d\eta - \int_{z_0}^z F_3(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Beispiel: Zentralkraftfeld

Für das Zentralkraftfeld ist explizit

$$\begin{aligned}
 U &= -\alpha \int_{x_0}^x \frac{\xi \, d\xi}{(\xi^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} - \alpha \int_{y_0}^y \frac{\eta \, d\eta}{(x^2 + \eta^2 + z_0^2)^{3/2}} - \alpha \int_{z_0}^z \frac{\zeta \, d\zeta}{(x^2 + y^2 + \zeta^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \\
 &= \frac{\alpha}{r} + U_0.
 \end{aligned}$$

1.5 Der ebene Winkel als Linienintegral

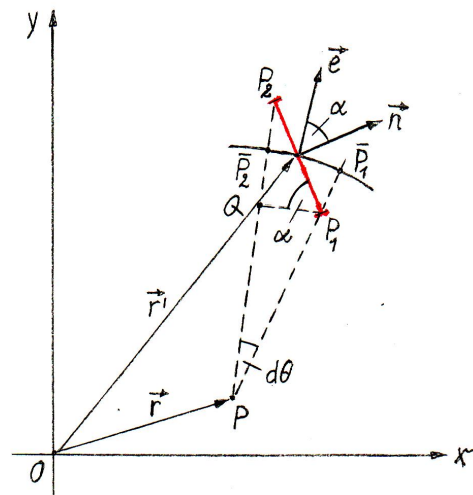
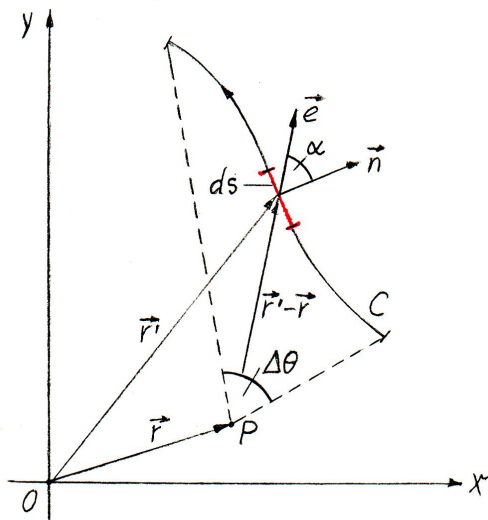
Nach dem physikalischen Einführungsbeispiel der mechanischen Arbeit als Linienintegral und der daran geknüpften Frage nach der Existenz und Berechnung des Potentials wenden wir uns nun einer geometrischen Anwendung des Linienintegrals zu.

Wir gehen der Frage nach, unter welchem Winkel $\Delta\theta$ ein in der (x, y) -Ebene liegendes Kurvenstück C von einem Beobachterstandort P („Aufpunkt“) aus, der sich auch in dieser Ebene befindet, erscheint.

Zunächst beantworten wir diese Frage für ein infinitesimales Linienelement $ds = \overline{P_1 P_2}$. Des- sen Mitte habe den Ortsvektor $\vec{r}'$ und den Normalen-Einheitsvektor $\vec{n}$. Der Ortsvektor des Punktes P sei $\vec{r}$. Dann ist

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

der Einheitsvektor in Blickrichtung, der mit dem Vektor $\vec{n}$ den Winkel α einschließt ($\cos \alpha = \vec{e} \cdot \vec{n}$).



Bezeichnet Q den Fußpunkt des Lotes von P_1 auf $\overline{PP_2}$, ist für ds als *infinitesimales* Linienelement $P_1 Q = ds \cdot \cos \alpha = ds \cdot (\vec{e} \cdot \vec{n})$. Der Winkel $d\theta$ ist im Bogenmaß

$$d\theta = \frac{\widehat{P_1 P_2}}{|\vec{r}' - \vec{r}|}.$$

Dabei sind $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ die Projektionen von P_1 beziehungsweise P_2 auf den Kreis mit dem Radius $\overline{P\bar{P}_1} = \overline{P\bar{P}_2} = |\vec{r}' - \vec{r}|$ um den Mittelpunkt P .

Je kleiner ds ist, umso genauer ist die Strecke $\overline{P_1Q}$ dem Bogen $\widehat{\bar{P}_1\bar{P}_2}$ gleich, also

$$d\theta = \frac{\overline{P_1Q}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \cdot ds.$$

Damit ist der gesuchte Winkel das Linienintegral

$$\Delta\theta = \int_C \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} ds = \int_C \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} ds.$$

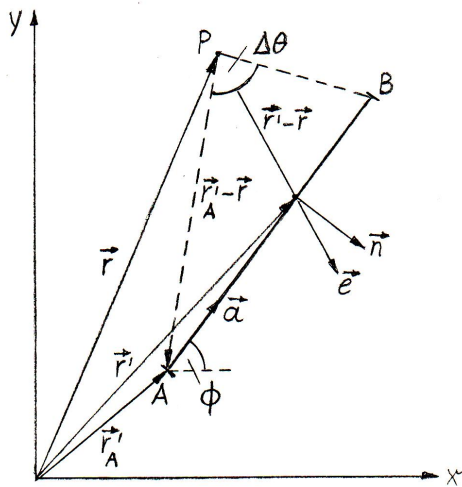
Beispiel 1 Wir berechnen dieses Linienintegral zuerst für eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge $|\overline{AB}| = L$, die von einem beliebigen Beobachterstandort P aus betrachtet wird. Der Richtungseinheitsvektor $\vec{a}$ dieser Strecke schließe mit der positiven x -Richtung den Winkel ϕ ein, sodaß

$$\vec{a} = \cos \phi \cdot \vec{i} + \sin \phi \cdot \vec{j}$$

mit dem zugehörigen Normalen-Einheitsvektor

$$\vec{n} = \sin \phi \cdot \vec{i} - \cos \phi \cdot \vec{j}$$

ist.



Die Parameterdarstellung der Strecke $\overline{AB}$ ist

$$\vec{r}' = \vec{r}'_A + \lambda \vec{a}$$

mit dem Linienelement $ds = d\lambda$,
($0 \leq \lambda \leq L$). Damit wird

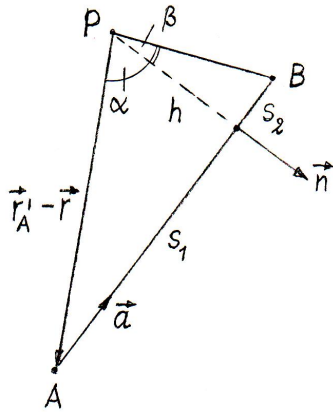
$$(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n} = (\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{n} = \text{const}$$

und

$$|\vec{r}' - \vec{r}|^2 = \lambda^2 + 2 [(\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{a}] \cdot \lambda + \ell^2,$$

worin $\ell \equiv |\vec{r}'_A - \vec{r}|$ ist. Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= [(\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{n}] \int_0^L \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 2 [(\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{a}] \cdot \lambda + \ell^2} \\ &= \arctan \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_A) \cdot \vec{a}}{(\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{n}} + \arctan \frac{L - (\vec{r} - \vec{r}'_A) \cdot \vec{a}}{(\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{n}}. \end{aligned}$$



Nun sind

$$(\vec{r}'_A - \vec{r}) \cdot \vec{n} = h \quad \text{und} \quad (\vec{r} - \vec{r}'_A) \cdot \vec{a} = s_1$$

Projektionen des Vektors $(\vec{r}'_A - \vec{r})$ auf die Richtungen von $\vec{n}$ beziehungsweise $\vec{a}$, und es ist außerdem $s_1 + s_2 = L$, sodaß

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \arctan \frac{s_1}{h} + \arctan \frac{s_2}{h} \\ &= \arctan(\tan \alpha) + \arctan(\tan \beta), \end{aligned}$$

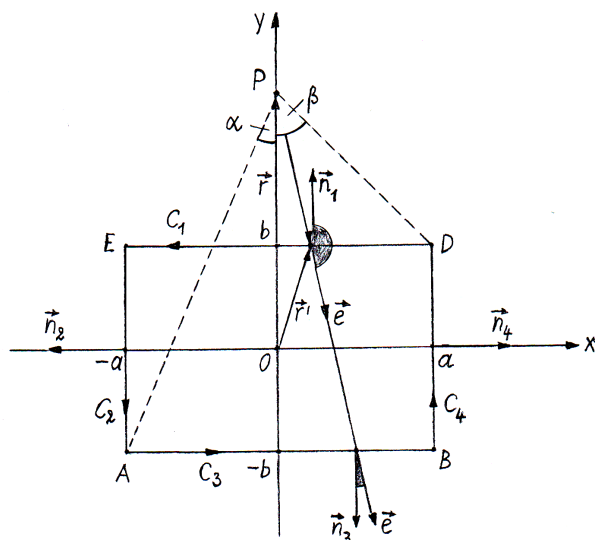
also

$$\Delta\theta = \alpha + \beta$$

resultiert.

Darin sind α und β durch die Bestimmungsgrößen der Strecke und die Beobachterposition wie angegeben berechenbar.

Beispiel 2 Eine erste Anwendung dieses Ergebnisses ist die Beobachtung eines Rechtecks mit den Eckpunkten $A(-a, -b)$, $B(a, -b)$, $D(a, b)$ und $E(-a, b)$ von einem Punkt P aus, der *außerhalb* dieses Rechtecks in dessen Ebene liegt. Die Seitenlängen des Rechtecks sind demnach $2a$ und $2b$, die Seiten selbst sind die Strecken $C_1, \dots, C_4$ mit den nach *außen* gerichteten Normalen-Einheitsvektoren $\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_4$. Die Beobachterposition wird durch den Vektor $\vec{r} = y_P \vec{j}$ mit $y_P > b$ beschrieben.



Für die Strecke $C_1: \overrightarrow{DE}$ haben wir den Richtungs-Einheitsvektor $\vec{a} = -\vec{i}$ und $\vec{n} = \vec{j}$, sodaß

$$\vec{r}' = \vec{r}'_D - \lambda \vec{i}$$

mit $\vec{r}'_D = a\vec{i} + b\vec{j}$ die Punkt-Richtungs-Gleichung von C_1 ist. Es ist die Länge dieser Strecke $L = 2a$. Das und damit $0 \leq \lambda \leq 2a$. Außerdem ist $(\vec{r}'_D - \vec{r}) \cdot \vec{a} = -a$ und $(\vec{r}'_D - \vec{r}) \cdot \vec{n} = -(y_P - b)$. Damit sieht der Beobachter in P diese Strecke unter dem Winkel

$$\Delta\theta_1 = -2\beta \text{ mit } \tan\beta = \frac{a}{y_P - b}.$$

negative Vorzeichen ist Ausdruck dafür, daß der Winkel zwischen $\vec{n}_1$ und der Beobachtungsrichtung $\vec{e}$ ein stumpfer Winkel ist.

Für die anderen Seiten des Rechtecks ergeben sich die Winkel

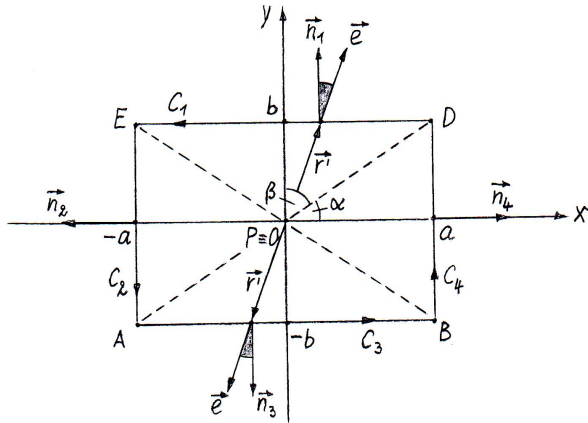
- C_3 : $\Delta\theta_3 = 2\alpha$ mit $\tan\alpha = \frac{a}{y_P + b}$,
(Der Winkel $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{n})$ ist ein spitzer Winkel überall auf C_3 .)
- C_2 : $\Delta\theta_2 = \beta - \alpha$
- C_4 : $\Delta\theta_4 = \beta - \alpha$.

Der Gesamtwinkel, unter dem von P aus das *orientierte* Rechteck gesehen wird, ist

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 + \Delta\theta_4 = 0;$$

zu jedem spitzen Winkel $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{n})$ gibt es ein stumpfwinkliges Gegenstück.

Anders verhält es sich, wenn wir die Beobachterposition P in das *Innere* des Rechtecks verlegen, etwa in den Koordinatenursprung $\vec{r} = \vec{0}$.



Dann ist für C_1 : $(\vec{r}'_D - \vec{r}) \cdot \vec{a} = -a$ und $(\vec{r}'_D - \vec{r}) \cdot \vec{n} = b$. Auf allen vier Rechteckseiten sind alle Winkel $\angle(\vec{e}, \vec{n})$ spitz, und wir erhalten

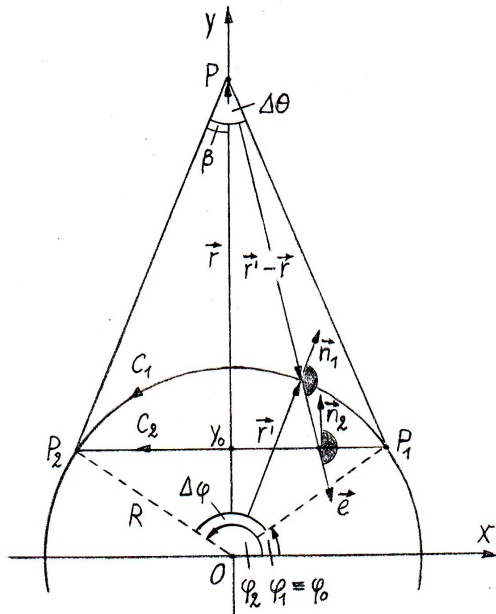
$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_3 = 2\beta \text{ mit } \tan\beta = \frac{a}{b}$$

und

$$\Delta\theta_2 = \Delta\theta_4 = 2\alpha \text{ mit } \tan\alpha = \frac{b}{a},$$

sodaß $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ und insgesamt $\Delta\theta = 4(\alpha + \beta) = 2\pi$ ist, was für einen „Rundumblick“ auch zu erwarten war.

Beispiel 3 Im nächsten Beispiel berechnen wir den Winkel $\Delta\theta_1$, unter dem, vom Punkt P aus, der Kreisbogen C_1 : $\widehat{P_1P_2}$ erscheint.



Den Kreis mit dem Radius R parametrisieren wir durch den Winkel φ (Polarkoordinaten), sodaß

$$\vec{r}' = R \cdot \vec{n}_1 = R(\cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j})$$

und $ds = R d\varphi$ ist. Die Beobachterposition wird durch den Vektor $\vec{r} = y_p \vec{j}$ mit $y_p = r > R$ beschrieben. Damit ist

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = (R^2 + r^2) - 2rR \sin\varphi$$

und

$$(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n}_1 = R - r \sin\varphi.$$

Mit den Integrationsgrenzen $\varphi_1 \equiv \varphi_0$ und $\varphi_2 = \pi - \varphi_0$ ergibt sich der zu berechnende Winkel $\Delta\theta_1$ aus

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 &= R \int_{C_1} \frac{R - r \sin\varphi}{(R^2 + r^2) - 2rR \sin\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \Delta\varphi - \arctan \frac{(R^2 + r^2) \tan \frac{\varphi}{2} - 2rR}{r^2 - R^2} \Bigg|_{\varphi=\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}. \end{aligned}$$

Darin bedeutet $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi - 2\varphi_0$. Bezeichnen wir die y -Koordinate der Punkte P_1 und P_2 mit $y'_1 = y'_2 = y_0 = R \sin \varphi_0$ und wenden die Formeln für den Tangens halber Winkel an, resultiert

$$\Delta\theta_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) - \arctan \left[\frac{(r^2 - R^2)y_0}{(r^2 + R^2)y_0 - 2rR^2} \cdot \cot \varphi_0 \right].$$

Um beide Summanden zusammenzufassen, berechnen wir $\tan \theta_1$. Mit

$$\cot \varphi_0 = \frac{\sqrt{R^2 - y_0^2}}{y_0}$$

resultiert nach längeren, aber einfachen algebraischen Umformungen

$$\tan \Delta\theta_1 = 2 \cdot \frac{(y_0 - r) \sqrt{R^2 - y_0^2}}{2y_0(y_0 - r) + (r^2 - R^2)}.$$

Diskussion:

- a) Zum Vergleich berechnen wir den Winkel $\Delta\theta_2$, unter dem vom Punkt P aus die Strecke C_2 : $\overrightarrow{P_1P_2}$ gesehen wird. Mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2 = \vec{j}$ können wir – bei sinngemäßer Übertragung der Formelsymbole ($b \rightarrow y_0$, $a \rightarrow \sqrt{R^2 - y_0^2}$) – direkt das Resultat für die Rechteckseite C_1 aus Beispiel 2 übernehmen. Dann ist

$$\Delta\theta_2 = -2\beta \quad \text{mit} \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{R^2 - y_0^2}}{r - y_0}$$

und

$$\tan \Delta\theta_2 = 2 \cdot \frac{(y_0 - r) \sqrt{R^2 - y_0^2}}{2y_0(y_0 - r) + (r^2 - R^2)} = \tan \Delta\theta_1.$$

Dieses Resultat gibt zu zwei Schlußfolgerungen Anlaß:

- Es ist $\tan \Delta\theta_1 = \tan \Delta\theta_2$, also $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$. Der Kreisbogen C_1 und die Strecke C_2 werden unter dem gleichen Winkel gesehen, wenn sie nur die gleichen Anfangs- und Endpunkte haben. Wir dürfen also, etwa um die Winkelberechnung zu vereinfachen, den Kreisbogen zur Strecke mit gleichen Randpunkten deformieren.
 - Wenn wir den Durchlaufsin und den Normalenvektor der Strecke C_2 umkehren (C_2 : $\overrightarrow{P_2P_1}$, $\vec{n}_2 = -\vec{j}$), wie es der Rechteckseite C_3 aus Beispiel 2 entspricht, erhalten wir $\Delta\theta_2 = -\Delta\theta_1$. Die Blickrichtung $\vec{e}$ schließt in diesem Fall mit $\vec{n}_1$ nach wie vor einen stumpfen Winkel ein, mit $\vec{n}_2$ aber einen spitzen Winkel. Fügen wir nun C_1 und C_2 zu einem entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreissegment zusammen, wird diese geschlossene, orientierte Figur unter dem Winkel $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = 0$ gesehen.
- b) Wenn die Punkte P_1 und P_2 nicht Schnittpunkte der von P ausgehenden „Sehstrahlen“ mit dem Kreis sind, sondern *Berührungspunkte*, sind die beiden Winkel $\angle OP_1P$ und $\angle OP_2P$ rechte Winkel, und es ist $\varphi_0 = \beta$. Es ist $y_0 = R \sin \varphi_0$ und in diesem Fall außerdem $\sin \beta = \frac{R}{r}$, was zusammen

$$y_0 = \frac{R^2}{r}$$

ergibt. Damit wird

$$\tan \Delta\theta_1 = -2 \cdot \frac{R\sqrt{r^2 - R^2}}{r^2 - 2R^2} = -\tan 2\beta,$$

also $\Delta\theta_1 = -2\beta = -2\varphi_0$.

Für Beobachterentfernungen, die im Sinne von $r \gg R$ groß sind, erhalten wir

$$\tan \Delta\theta_1 \approx -2 \cdot \frac{R}{r} \ll 1$$

und mit $\tan \theta_1 \approx \theta_1$

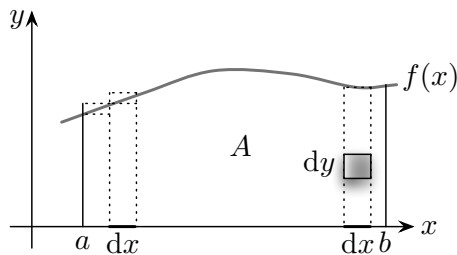
$$\Delta\theta_1 \approx -2 \cdot \frac{R}{r}.$$

Aus großem Abstand ist nahezu der ganze Halbkreis sichtbar.

2 Oberflächenintegrale

2.1 Das bestimmte Integral oder: die ebene Fläche als Linienintegral

Das uns bereits bekannte bestimmte Integral ist die Fläche, die von einer Kurve $y = f(x)$, der x -Achse und den Parallelen zur y -Achse bei $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.



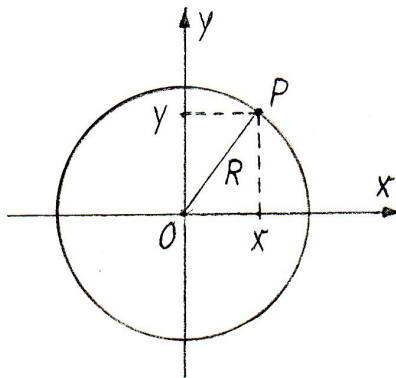
Das Integral

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

hat die Struktur „Grundlinie $dx \times$ Höhe $f(x)$ “, wobei die Höhe $f(x)$ vom Ort auf der Grundlinie (x -Achse) abhängt.

Unter den neu hinzugewonnenen Gesichtspunkten können wir dieses Integral als Linienintegral entlang der „Kurve“ $C: \vec{r} = x \cdot \vec{i}$ (x -Achse) mit der Koordinate x als Parameter auffassen.

Beispiel Von einem Kreis umschlossene Fläche



Die Gleichung des Kreises ist in kartesischen Koordinaten (Radius $R = \text{const}$) $x^2 + y^2 = R^2$. Mit $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ wird die Kreisfläche (Faktor 2: zwei Halbkreise)

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \left(x \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R} \right) \Big|_0^R \\ &= 2R^2 \arcsin 1 = 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

2.2 Die ebene Fläche als Doppelintegral

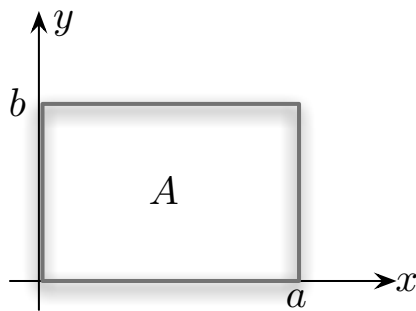
Wir wollen uns nun mit einer anderen Auffassung des Flächeninhalts vertraut machen. Die „Höhe“ $f(x)$ ist nämlich selbst das Resultat einer Integration, also einer Summation von We-gelementen in y -Richtung,

$$\int_0^{f(x)} dy = y \Big|_0^{f(x)} = f(x).$$

Damit wird die Fläche das *Doppelintegral*

$$A = \int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y=0}^{y=f(x)} dy \right] dx = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=0}^{y=f(x)} dy \, dx .$$

Anschaulich besagt diese Berechnungsvorschrift, eine zu bestimmende Fläche mit *infinitesimalen Flächenelementen* der Größe $df = dx \cdot dy$ auszulegen und diese unter Beachtung der Grenzen aufzusummieren („zu zählen“). Die Schreibweise der Doppelintegrale ist so vereinbart, daß die Integrationsvariablen den Integrationsgrenzen „von innen nach außen“ zugeordnet werden, so daß die Klammern in vorstehender Formel weggelassen werden konnten.

BeispieleBeispiel 1: Rechteckfläche

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

Es ist

$$A = \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a dx \, dy = \int_{y=0}^b a \, dy = a \cdot b.$$

Es gilt aber auch

$$A = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dy \, dx = \int_{x=0}^a b \, dx = b \cdot a$$

und sogar

$$A = \left[\int_0^a dx \right] \cdot \left[\int_0^b dy \right] = a \cdot b.$$

Daß wir bei der Berechnung des Doppelintegrals die Reihenfolge der Integrationen vertauschen und das Doppelintegral sogar als Produkt zweier Integrale auffassen (faktorisieren) dürfen, liegt daran, daß für beide Variable (x und y) die Integrationsgrenzen konstant sind. In diesem Sinne sind die kartesischen Koordinaten der Rechteck-Geometrie optimal angepaßt, denn die Rechteckseiten fallen mit den Koordinatenlinien $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ zusammen.

Beispiel 2: Nochmals die Kreisfläche

Die Integrationsgrenzen $-R \leq x \leq R$ und $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ sind jetzt so, daß die y -Grenzen von x abhängen,

$$A = \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \, dx.$$

Nun ist es wichtig, die y -Integration *zuerst* auszuführen, da das Resultat die andere Integrationsvariable x enthält, also den Integranden für die x -Integration erst festlegt. Wir erhalten

$$A = 2 \int_{x=-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

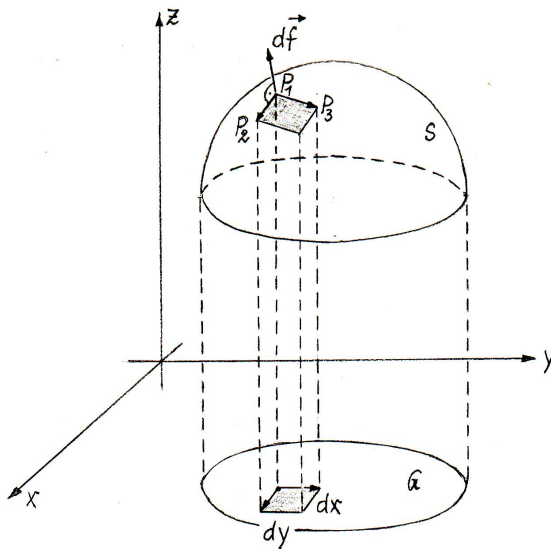
und verfahren damit weiter wie oben.

Der Vergleich beider Beispiele zeigt, daß die Rechteckfläche leichter als die Kreisfläche zu berechnen ist, da die Integrationsvariablen unabhängig voneinander und die Integrationsgrenzen konstant sind. Als Grund dafür haben wir die übereinstimmende Gestalt der Flächenelemente $df = dx \cdot dy$ mit der zu berechnenden Rechteckfläche erkannt.

2.3 Oberflächenintegrale gekrümmter Flächen

Nun betrachten wir eine gekrümmte, zweidimensionale Fläche S , die in den dreidimensionalen Raum eingebettet ist. Die Fläche S werde durch die Funktion $z = z(x, y)$ beschrieben. Ihre Projektion in die (x, y) -Ebene ist das Grundgebiet G . Umgekehrt ist S das Bild von G bei der

Abbildung $z = z(x, y)$.



Die mit P_1 , P_2 und P_3 bezeichneten Punkte haben die Koordinaten

$$P_1 : x, y, z(x, y)$$

$$P_2 : x + dx, y,$$

$$z(x + dx, y) = z(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$P_3 : x, y + dy,$$

$$z(x, y + dy) = z(x, y) + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Damit sind die Vektoren

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = dx \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial x} dx \cdot \vec{k}$$

$$\text{und } \overrightarrow{P_1 P_3} = dy \cdot \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial y} dy \cdot \vec{k}.$$

Diese Vektoren spannen das Flächenelement $d\vec{f}$ der lokalen Tangentialebene von S im Punkt P_1 auf. Gemäß der geometrischen Bedeutung des Vektorprodukts ist dieses Flächenelement

$$d\vec{f} = \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} dx \\ 0 & dy & \frac{\partial z}{\partial y} dy \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) dx dy.$$

Andererseits ist $d\vec{f} = \vec{n} \cdot df$ mit $\vec{n}$ als Normalen-Einheitsvektor von S . Der Vergleich ergibt

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Dieser Vektor ist uns bereits bekannt, denn er gibt den partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ eine anschauliche Bedeutung.

Außerdem lesen wir

$$df = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

ab. Darin ist $dx \cdot dy$ das Flächenelement von G .

Damit ist der Inhalt der Fläche S

$$A = \iint_S df = \iint_G \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy,$$

wobei sich die Integrationsgrenzen aus dem „Grundriß“ G ergeben.

Beispiel Inhalt der Oberfläche einer Halbkugel

- S : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ($z > 0$, obere Halbkugel)
- G : $x^2 + y^2 \leq R^2$, (Kreisfläche)
- Flächenelement:

$$\begin{aligned} df &= \sqrt{\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1} \, dx \, dy = \frac{R}{z} \, dx \, dy \\ &= \frac{R \cdot dx \, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

- Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} A_S &= R \iint_G \frac{dx \, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ &= 2R \int_{-R}^R \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2R \int_{-R}^R \arcsin 1 \, dx \\ &= 2\pi R^2 \end{aligned}$$

2.4 Der Raumwinkel als Oberflächenintegral

Bei der Berechnung des ebenen Winkels $\Delta\theta$, unter dem, von einem Beobachterstandort P aus, ein Kurvenstück C erscheint, haben wir die Begrenzungspunkte dieser Kurve mit P verbunden. Dadurch wurden diese Punkte auf einen Kreis mit beliebigem Radius und P als Mittelpunkt projiziert und ein Bogenstück bestimmter Länge als Teil des Kreisumfangs ausgeschnitten. Der Quotient aus der Länge dieses Bogenstücks und dem Radius des Kreises ist ein von der Größe dieses Kreises unabhängiges Maß für diesen Winkel.

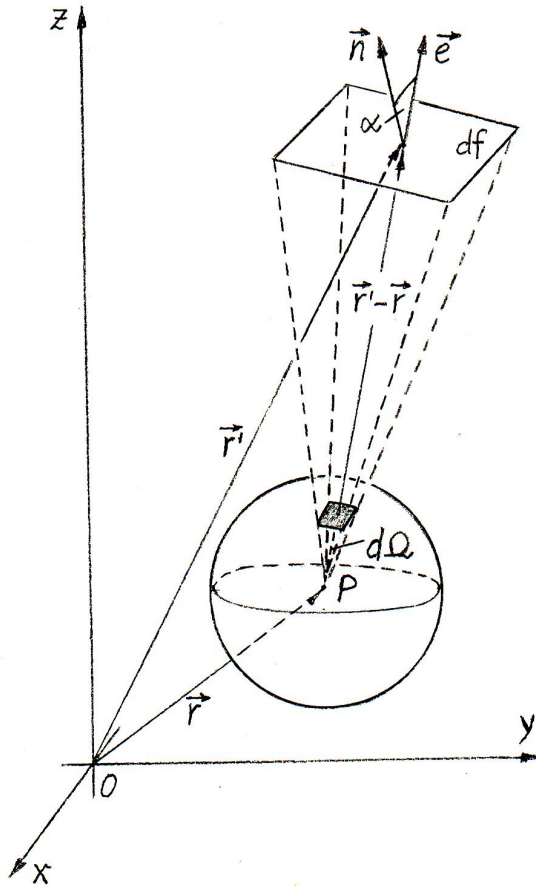
Bezeichnet $\vec{r}$ den Ortsvektor des Beobachterstandorts P , $\vec{r}'$ den Ortsvektor der Mitte eines infinitesimalen Längenelements ds der Kurve C , $\vec{n}$ den lokalen Normalen-Einheitsvektor zu ds und

$$\vec{e} = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

den Einheitsvektor in Blickrichtung von P zum Mittelpunkt der Strecke ds , wird der Winkel $\Delta\theta$ durch das Linienintegral

$$\Delta\theta = \int_C \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \, ds = \int_C \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} \, ds.$$

dargestellt.



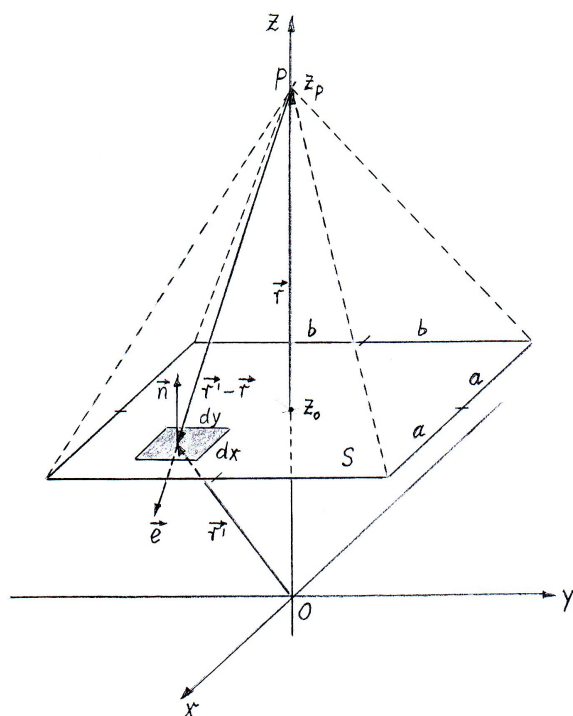
Ersetzen wir nun die Kurve C durch eine Fläche S , die von P aus betrachtet wird, tritt an die Stelle des ebenen Winkels $\Delta\theta$ der *Raumwinkel* $\Delta\Omega$. Seine Definition folgt der von $\Delta\theta$ sinngemäß: Wir verbinden jeden Punkt der Randkurve von S mit P und betrachten eine Kugel beliebiger Größe mit P als Mittelpunkt. Dadurch wird die Randkurve von S auf die Kugel projiziert und ein Teil ihrer Oberfläche ausgeschnitten. Der Quotient aus dem Flächeninhalt dieser Projektion und dem Quadrat des Kugelradius ist ein Maß für den Raumwinkel $\Delta\Omega$.

Anstelle des Linienelements ds haben wir nun das *infinitesimale* Flächenelement df der Tangentialebene, die lokal die Fläche S linear approximiert. Der Vektor $\vec{r}'$ ist der Ortsvektor des Mittelpunktes dieser Tangentialebene, $d\vec{f} = \vec{n} \cdot df$ deren orientiertes Flächenelement. Die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{e}$ behalten ihre oben genannte Bedeutung bei.

Dann wird aus dem ebenen Winkel als Linienintegral die Darstellung des Raumwinkels

$$\Delta\Omega = \iint_S \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} df = \iint_S \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot d\vec{f}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

als Oberflächenintegral. Der um eins erhöhte Exponent von $|\vec{r}' - \vec{r}|$ im Nenner beider Ausdrücke ergibt sich aus der oben gegebenen Definition des Raumwinkels (P ist Mittelpunkt einer Kugel anstelle eines Kreises) und auch daraus, daß $\Delta\Omega$ dimensionslos sein muß (Flächenelement anstelle eines Linienelements).



Beispiel 1 Wir berechnen den Raumwinkel, unter dem ein Beobachter in P , der sich auf der z -Achse befindet ($\vec{r} = r\vec{k} = z_p \cdot \vec{k}$), ein Rechteck sieht, das parallel zur (x, y) -Ebene in der Höhe z_0 so liegt, daß die z -Achse durch seinen Mittelpunkt geht. Die Seitenlängen des Rechtecks seien durch $-a \leq x \leq a$ und $-b \leq y \leq b$ beschrieben. Wir haben mit $\vec{n} = \vec{k}$ also $d\vec{f} = dx dy \cdot \vec{k}$, $\vec{r}' = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$ und $(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{n} = z_0 - r$. Damit berechnet sich der Raumwinkel $\Delta\Omega$ aus dem Doppelintegral

$$\Delta\Omega_1 = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \frac{z_0 - r}{[x^2 + y^2 + (z_0 - r)^2]^{3/2}}.$$

Obwohl die Integrationsgrenzen fest sind, ist dieses Integral nicht faktorisiert, da der Integrand nicht als Produkt zweier Funktionen geschrieben werden kann, die allein von x und allein von y abhängen. In einem ersten Schritt beginnen wir mit einer der beiden Variablen und betrachten die andere als konstant, um im zweiten Schritt auch die Integration bezüglich dieser Variablen auszuführen. Die Auswertung ergibt

$$\Delta\Omega_1 = 4 \cdot \arctan \frac{ab}{(z_0 - r) \sqrt{a^2 + b^2 + (z_0 - r)^2}}.$$

Diskussion:

- a) Bei Beobachtung aus großer Entfernung ($r \gg a, b, z_0$) erhalten wir

$$\Delta\Omega_1 \approx -\frac{2a \cdot 2b}{r^2} = -\frac{A_R}{r^2},$$

worin $A_R = 2a \cdot 2b$ die Rechteckfläche ist. Das Minuszeichen drückt aus, daß für $r > z_0$ der Winkel $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{n})$ ein stumpfer Winkel ist.

- b) Ein zweites Rechteck gleicher Größe soll parallel zu dem ersten in der Höhe $-z_0$ liegen, und auch sein Normalenvektor soll invertiert werden ($d\vec{f} \rightarrow -d\vec{f}$). Dann ist

$$\Delta\Omega_2 = 4 \cdot \arctan \frac{ab}{(z_0 + r) \sqrt{a^2 + b^2 + (z_0 + r)^2}}.$$

Für einen Beobachter im Koordinatenursprung ($r = 0$) stimmen beide Resultate überein. Wenn wir beide Rechtecke als Grund- und Deckfläche eines Quaders auffassen, können wir uns vorstellen, daß sich der Beobachter im Mittelpunkt des Quaders befindet, wobei die Raumwinkel-Anteile der Seitenflächen noch zu berechnen sind. Um die Rechnungen zu vereinfachen, verwandeln wir den Quader in einen Würfel

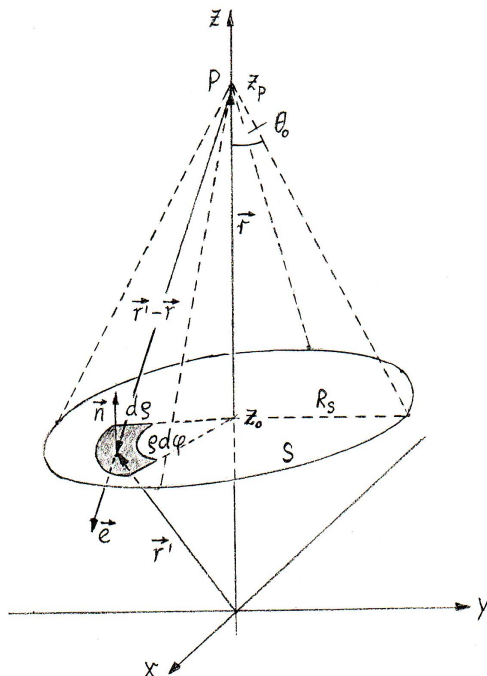
($z_0 = b = a$) und erhalten für beide Rechtecke zusammen

$$\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 = 2 \cdot 4 \arctan \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} \right) = 8 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3} \pi.$$

Aus Symmetriegründen trägt jedes Paar gegenüberliegender Flächen gleich viel zu dem „räumlichen Rundumblick“ bei, für den der gesamte Raumwinkel

$$\Delta\Omega_{\text{tot}} = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi = 4\pi$$

ist.



Beispiel 2 Wir ersetzen das Rechteck durch eine Kreisscheibe mit dem Radius R_S , die sich in der gleichen Lage wie das Rechteck befindet. Wir rechnen in Zylinderkoordinaten, haben also $\vec{r}' = \varrho \vec{e}_\varrho + z_0 \vec{k}$, $d\vec{f} = \varrho d\varrho d\varphi \cdot \vec{k}$ und $(\vec{r}' - \vec{r})\vec{n} = z_0 - r$. Der Raumwinkel ist

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_S} d\varrho \cdot \varrho \frac{z_0 - r}{[\varrho^2 + (z_0 - r)^2]^{3/2}} \\ &= 2\pi\delta \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_S^2}{(r-z_0)^2}}} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\delta \equiv \frac{z_0 - r}{|z_0 - r|} = \begin{cases} -1 & \text{für } r > z_0 \\ +1 & \text{für } r < z_0 \end{cases}.$$

Diskussion:

a) Für $r \gg R_S, z_0$ ist

$$\Delta\Omega \approx -2\pi \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} R_S^2 r^2 \right) \right] = -\frac{\pi R_S^2}{r^2} = -\frac{A_S}{r^2}$$

mit $A_S = \pi R_S^2$ als Flächeninhalt der Kreisscheibe.

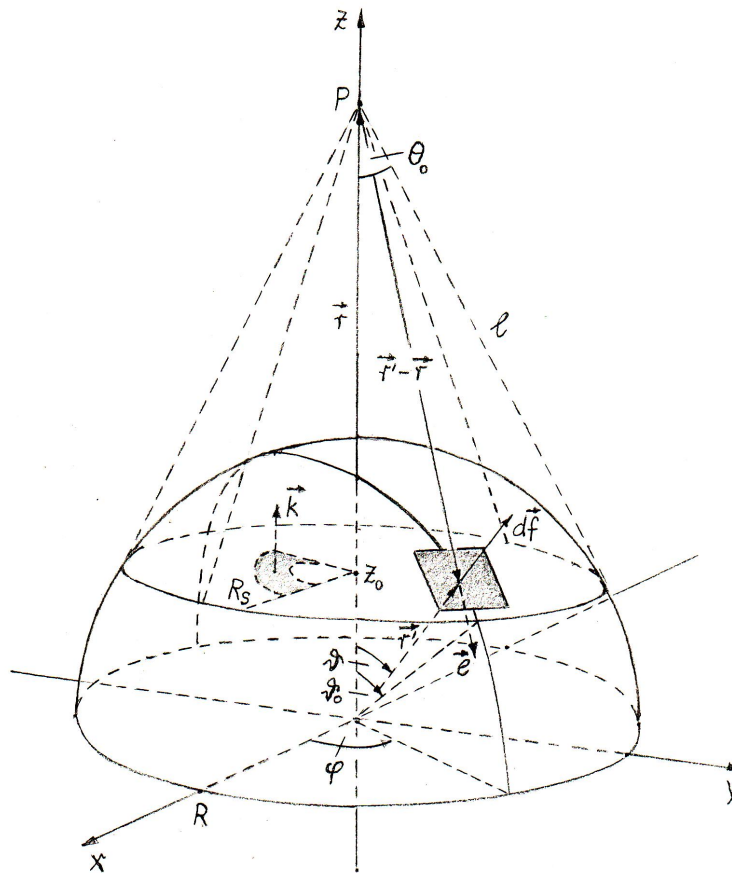
b) Es sei $r > z_0$. Die Verbindungslinien von P mit den Randpunkten der Kreisscheibe konstituieren den Mantel eines geraden Kreiskegels mit dem Halben Öffnungswinkel θ_0 . Es ist

$$\tan \theta_0 = \frac{R_S}{r - z_0}$$

und damit

$$\Delta\Omega = -2\pi(1 - \cos \theta_0).$$

Beispiel 3 Wir betrachten die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R . Der Beobachter befindet sich nach wie vor auf der z -Achse, ($\vec{r} = r\vec{k} = z_p\vec{k}$). Wir rechnen in Kugelkoordinaten. Ein Punkt auf dieser Oberfläche wird durch $\vec{r}' = R\vec{e}_r$ beschrieben. Mit $\vec{n} = \vec{e}_r$ ist das Flächenelement $d\vec{f} = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \cdot \vec{e}_r$. Damit haben wir $(\vec{r}' - \vec{r})\vec{n} = R - r \cos \vartheta$ und $|\vec{r}' - \vec{r}|^2 = (R^2 + r^2) - 2rR \cos \vartheta$.



Der Raumwinkel $\Delta\Omega$ ist

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \frac{(R-r\cos\vartheta)\sin\vartheta}{[(R^2+r^2)-2rR\cos\vartheta]^{3/2}} \\ &= 2\pi \left(\frac{r-R\cos\vartheta_0}{\sqrt{(R^2+r^2)-2rR\cos\vartheta_0}} - \delta \right) \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} +1 & \text{für } r > R \\ -1 & \text{für } r < R \end{cases} .\end{aligned}$$

Darin kann ϑ_0 jeden Wert aus dem Intervall $0 \leq \vartheta_0 \leq \pi$ annehmen. (In der Abbildung ist der Fall dargestellt, daß die von P ausgehenden „Sehstrahlen“ die Kugel tangential berühren.)

Diskussion:

a) Für die Vollkugel ($\vartheta_0 = \pi$) resultiert – wie zu erwarten –

$$\Delta\Omega = 2\pi(1-\delta) = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R \\ 4\pi & \text{für } r < R \end{cases}.$$

Dabei ist im Fall $r < R$ nicht $r = 0$ verlangt.

b) Für einen Beobachter im Mittelpunkt der Kugel ($r = 0$) ist $\vec{e} = \vec{n} = \vec{e}_r$ und

$$\Delta\Omega = 2\pi(1 - \cos\vartheta_0).$$

Andererseits ist der Flächeninhalt der zugehörigen Kugelkappe

$$A = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi R^2 (1 - \cos \vartheta_0) = R^2 \cdot \Delta\Omega,$$

wie es der ursprünglichen Definition des Raumwinkels entspricht.

- c) Es ist nach dem Cosinus-Satz der ebenen Trigonometrie $R^2 + r^2 - 2rR \cos \vartheta_0 = \ell^2$ mit ℓ als der Länge der „Sehstrahlen“. Auch ist $\ell^2 = (r - z_0)^2 + R_S^2$, wenn R_S der Radius des durch ϑ_0 festgelegten Breitenkreises ist. Dann wird mit $\delta = +1$ (entsprechend $r > R$)

$$\Delta\Omega = -2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_S^2}{(r-z_0)^2}}} \right).$$

Das stimmt mit dem Resultat für die Kreisscheibe (dort $\delta = -1$) überein, wenn für diese $\vec{n} = \vec{k}$ ist.

Wir dürfen also die Fläche S deformieren, solange nur die Randkurve unverändert bleibt. Im vorliegenden Fall besteht der Vorteil der Kreisscheibe darin, daß ihr Normalen-Einheitsvektor $\vec{n} = \vec{k}$ eine konstante Richtung hat.

Fügen wir die Kugelkappe mit der zugehörigen Ebene des Breitenkreises zu einer geschlossenen Fläche zusammen, deren lokale Normalenvektoren überall nach außen weisen ($\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$ für die Kreisscheibe), ist der totale Raumwinkel gleich Null.

- d) Mit θ_0 als dem halben Öffnungswinkel des von den „Sehstrahlen“ gebildeten Kreiskegels wird

$$\Delta\Omega = -2\pi(1 - \cos \theta_0).$$

Dieser Kegel schneidet aus einer Kugel mit P als Mittelpunkt und dem Radius $R_{(P)}$ eine Fläche der Größe

$$A_{(P)} = 2\pi R_{(P)}^2 (1 - \cos \theta_0)$$

aus, sodaß wieder

$$\Delta\Omega = -\frac{A_{(P)}}{R_{(P)}^2}$$

ist.

- e) Es sei $r > R$, und die von P ausgehenden „Sehstrahlen“ berühren die Kugel tangential. Dann ist $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ und $\cos \vartheta_0 = \frac{R}{r}$ und damit

$$\Delta\Omega = -2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} \right) = -2\pi(1 - \sin \vartheta_0).$$

Für große Beobachterentfernungen ($r \gg R$) wird daraus

$$\Delta\Omega \approx -\frac{\pi R^2}{r^2}$$

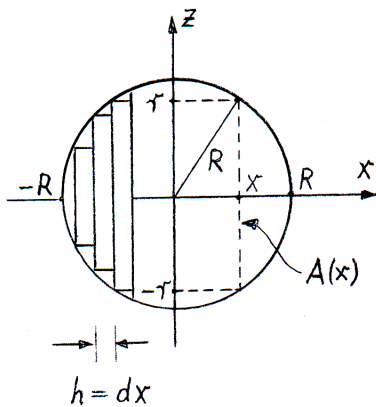
mit πR^2 als Flächeninhalt des Äquatorkreises.

Beispiel: Bei der Betrachtung der Sonnen- oder Mondscheibe sehen wir in sehr guter Näherung die ganze uns zugewandte Hälfte der Oberfläche dieser Himmelskörper.

3 Volumenintegrale

3.1 Das Volumen als Doppelintegral

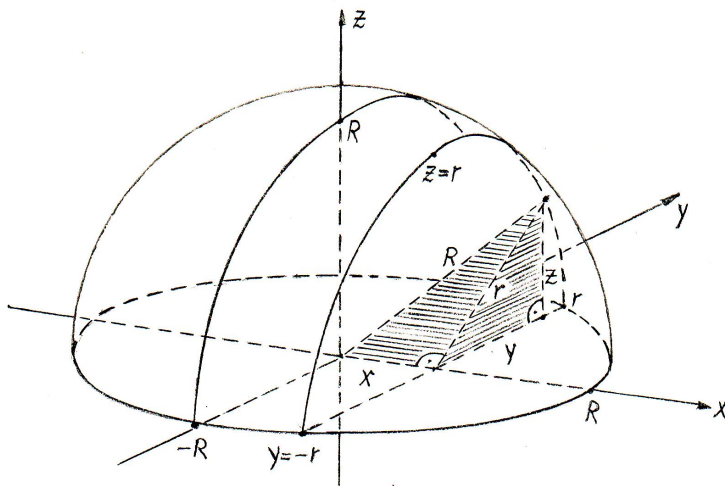
Doppelintegrale sind nicht nur auf Flächenberechnungen beschränkt. Wir berechnen exemplarisch das von einer Kugel mit dem Radius $R = \text{const}$ umschlossene *Volumen als Doppelintegral*. Dazu zerlegen wir die Kugel in Kreisscheiben der „Höhe“ dx .



Es ist „Grundfläche $A(x) \times$ Höhe dx “ das Volumen einer Kreisscheibe. Mit $A(x) = \pi[r(x)]^2$ und $r^2 = R^2 - x^2$ wird das Kugelvolumen

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R A(x) dx \\ &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

Nun betonen wir, daß $A(x)$ selbst als (Riemannsches) Integral darstellbar ist.



r : Radius der Kreisscheibe, R : Kugelradius

Die Fläche einer Kreisscheibe ist (Faktor 2: Vollkreis)

$$A(x) = 2 \int_{-r(x)}^{r(x)} z(x, y) dy.$$

Der Abbildung entnehmen wir

$$\begin{aligned} x^2 + r^2 &= R^2 \\ \text{und } y^2 + z^2 &= r^2, \end{aligned}$$

also zusammen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

die Gleichung einer Kugel in kartesischen Koordinaten.

Das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=-R}^R \left[2 \int_{y=-r(x)}^{r(x)} z(x, y) \, dy \right] dx \\ &= 2 \int_{x=-R}^R \int_{y=-r(x)}^{r(x)} z(x, y) \, dy \, dx \end{aligned}$$

ist damit ein *Doppelintegral*. „Höhe $z \times$ (infinitesimale) Grundfläche $dx \cdot dy$ “ ist das Volumen von Quadern (siehe nachfolgende Abbildung). Drücken wir nun die Funktionen $r(x)$ und $z(x, y)$ durch x , y und den Kugelradius R aus,

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

erhalten wir

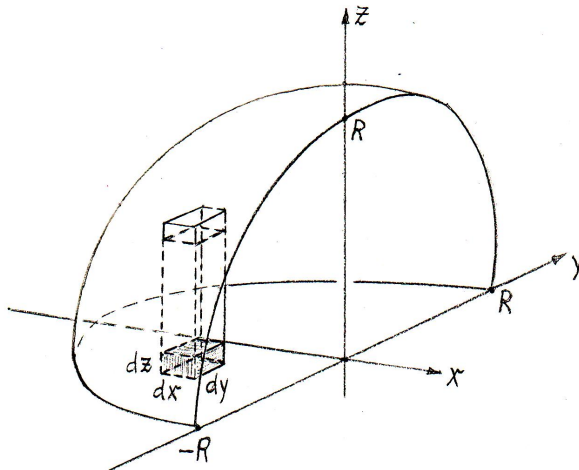
$$V = 2 \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dy \, dx.$$

Auch hier ist darauf zu achten, die y -Integration zuerst auszuführen, da das Resultat noch von x abhängt. Außerdem haben wir bei der Festlegung der Integrationsintervalle von den Symmetrieeigenschaften des Integranden Gebrauch gemacht. Dann resultiert

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{x=-R}^R 2 \cdot \frac{1}{2} \left[y \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + (R^2 - x^2) \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} dx \\ &= 4 \int_{x=0}^R (R^2 - x^2) \cdot \frac{\pi}{2} dx \\ &= 2\pi \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Das Volumen als Doppelintegral stellt eine direkte Verallgemeinerung des Riemannschen Integrals dar. Bei der Integration von Funktionen mit mehreren Variablen werden Variable, die nicht Integrationsvariable sind, als Konstanten behandelt. Insofern ist ein Mehrfachintegral lediglich eine wiederholte Anwendung gewöhnlicher Integrale, für die es keiner neuen Regeln bedarf. Im allgemeinen hängen die Integrationsgrenzen jedoch von den Variablen ab, wodurch die Reihenfolge der Integrationen bestimmt wird.

3.2 Das Dreifachintegral



Wir zeigen am Beispiel der Kugel, daß analog zur Flächenberechnung die „Höhe“ $z(x, y)$ selbst als Resultat einer Integration aufgefaßt werden kann, nämlich

$$z(x, y) = \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$$

Damit wird das Kugelvolumen (ohne den Faktor 2 bei den nachfolgenden Integrationsgrenzen) zu dem *Dreifachintegral*

$$V = \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx.$$

Die Ausrechnung ergibt mit der z -Integration zuerst

$$V = \int_{x=-R}^R \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2} \, dy \, dx$$

und verläuft dann weiter wie oben.

Anschaulich bedeutet das Dreifachintegral, ein bestimmtes Volumen mit *infinitesimalen Volumenelementen* („Quadern“) $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ auszulegen und diese unter Beachtung der Grenzen aufzusummieren. Erneut tritt bei kartesischen Koordinaten das Problem auf, daß die Integrationsgrenzen bei der Berechnung des Kugelvolumens variabel sind.

3.3 Volumenintegrale: Beispiele

Bei der Berechnung der nachfolgenden Volumenintegrale machen wir von Zylinder- und Kugelkoordinaten Gebrauch. Wir verweisen diesbezüglich auf das mit „Intermezzo“ überschriebene nachfolgende Kapitel, in welchem diese Koordinaten behandelt werden.

Trägheitsmoment einer Kugel Wir berechnen in Kugelkoordinaten das Trägheitsmoment

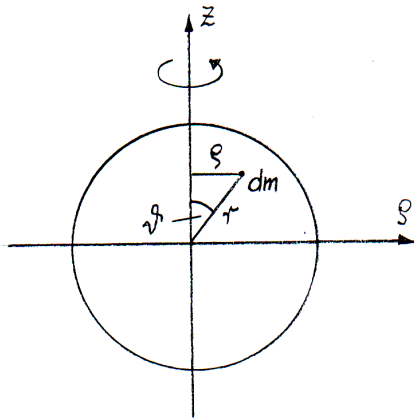
$$I = \int \varrho^2 \, dm$$

für eine Vollkugel bei Drehung um eine Achse, die durch ihren Mittelpunkt geht, als Beispiel für ein Volumenintegral mit einem komplizierteren Integranden. Die Massenelemente dm haben senkrechte Abstände ϱ von dieser Drehachse. Die Massendichte μ der Kugel sei konstant. Dann sind die Massenelemente $dm = \mu \, dV$, und die Gesamtmasse M der Kugel mit dem Volumen

V ist $M = \mu V$, also

$$I = \frac{M}{V} \int_{\text{Kugel}} \varrho^2 dV.$$

Zuerst ist zu beachten, daß ϱ den senkrechten Abstand von der Drehachse beschreibt, die Kugelkoordinate r aber vom Mittelpunkt der Kugel aus gemessen wird.



Es ist $\varrho = r \sin \vartheta$ und damit

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{V} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{M}{V} \cdot \frac{R^5}{5} \underbrace{\left(-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) \Big|_0^\pi}_{4/3} \cdot 2\pi \\ &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} MR^2. \end{aligned}$$

Das Ergebnis hat die Dimension „Masse $\times$ (Abstand)²“ eines Trägheitsmoments. Der Faktor $\frac{2}{5}$ ist der „Geometriefaktor“ für die Kugel.

Volumen eines Kreiskegels in Zylinderkoordinaten

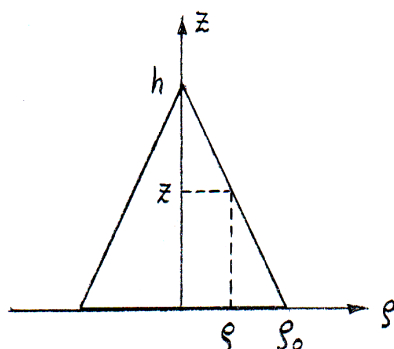
Ein gerader Kreiskegel habe den Grundkreis-Radius ϱ_0 und die Höhe h . Wir lesen aus der Abbildung mit Hilfe des Strahlensatzes die Steigung

$$\frac{h}{\varrho_0} = \frac{z}{\varrho_0 - \varrho}$$

des Kegelmantels ab und erhalten daraus den Zusammenhang

$$z = \frac{h}{\varrho_0}(\varrho_0 - \varrho)$$

zwischen den Zylinderkoordinaten ϱ und z . Damit wird das Kegelvolumen (z -Integration zuerst)



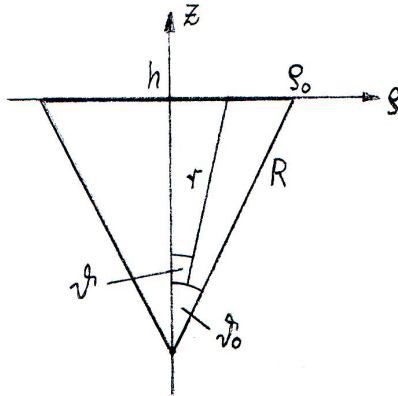
$$\begin{aligned} V &= \int_{\varrho=0}^{\varrho_0} d\varrho \varrho \int_{z=0}^{\frac{h}{\varrho_0}(\varrho_0 - \varrho)} dz \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\varrho=0}^{\varrho_0} \varrho \cdot z \Big|_{z=0}^{\frac{h}{\varrho_0}(\varrho_0 - \varrho)} d\varrho \\ &= 2\pi \frac{h}{\varrho_0} \int_{\varrho=0}^{\varrho_0} \varrho(\varrho_0 - \varrho) d\varrho \\ &= 2\pi \frac{h}{\varrho_0} \left(\varrho_0 \frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^3}{3} \right) \Big|_0^{\varrho_0} = \frac{\pi}{3} \varrho_0^2 h. \end{aligned}$$

Volumen eines Kreiskegels in Kugelkoordinaten

Zum Vergleich berechnen wir das Kegelvolumen noch einmal in Kugelkoordinaten. Dazu setzen wir die Kegelspitze in den Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius R . Der halbe Öffnungswinkel des Kegels sei ϑ_0 mit ϑ als einer der Kugelkoordinaten. Da die Grundfläche des Kegels eben ist, hängt die Integrationsgrenze der radialen Variablen r von der Poldistanz ab. Wir lesen aus der Abbildung

$$\cos \vartheta = \frac{h}{r} \quad \longrightarrow \quad r = \frac{h}{\cos \vartheta}, \quad (0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0)$$

ab und haben damit (r -Integration zuerst)



$$\tan \vartheta_0 = \frac{\rho_0}{h}$$

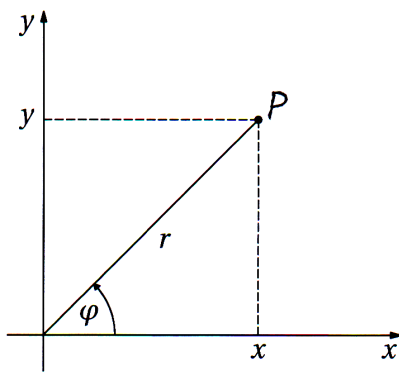
$$\begin{aligned} V &= \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} d\vartheta \sin \vartheta \int_{r=0}^{h/\cos \vartheta} r^2 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} \sin \vartheta \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{h/\cos \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{3} h^3 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} \frac{\sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{3} h^3 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} \frac{-d \cos \vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \frac{2\pi}{3} h^3 \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} \\ &= \frac{\pi}{3} h^3 \left(\frac{1}{\cos^2 \vartheta_0} - 1 \right) = \frac{\pi}{3} h^3 \tan^2 \vartheta_0 \\ &= \frac{\pi}{3} h^3 \cdot \frac{\rho_0^2}{h^2} = \frac{\pi}{3} \rho_0^2 h. \end{aligned}$$

Selbstverständlich stimmen beide Resultate überein. Wir sehen weiterhin, daß weder die Zylinder- noch die Kugelkoordinaten der Symmetrie des Kreiskegels ideal entsprechen. Das äußert sich darin, daß jeweils noch eine der drei Integrationsgrenzen nicht konstant ist, was Auswirkungen auf die Reihenfolge der Integrationen hat. Gleichwohl sind auch hier sowohl die Zylinder- als auch die Kugelkoordinaten den kartesischen Koordinaten überlegen.

4 Intermezzo: Krummlinige Orthogonalkoordinaten

4.1 Ebene Polarkoordinaten (r, φ)

Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten Polarkoordinaten sind Koordinaten in der Ebene als die wir die (x, y) -Ebene wählen.



Zwischen den ebenen Polarkoordinaten (r, φ) und den kartesischen Koordinaten (x, y) besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi . \end{aligned}$$

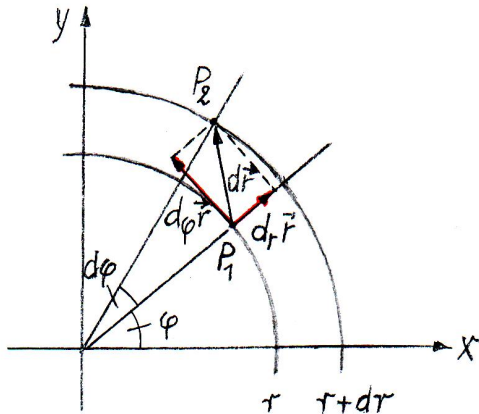
Darin ist $r \geq 0$ der Abstand vom Koordinatenursprung und $0 \leq \varphi < 2\pi$ der gegen die positive x -Achse entgegen dem Uhrzeigersinn gemessene Azimutwinkel.

Die Umkehrung dieses Zusammenhangs ist

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} . \end{aligned}$$

Zur Entscheidung, in welchem Quadranten der Winkel φ liegt, muß noch eine weitere Winkelfunktion herangezogen werden.

Tangentenvektoren der Koordinatenlinien Die Koordinatenlinien $r = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ der Polarkoordinaten sind konzentrische Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ beziehungsweise Ursprungsgeraden $y = \tan \varphi \cdot x$.



Der Abstandsvektor zweier infinitesimal benachbarter Punkte P_1 und P_2 ist

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right) \vec{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right) \vec{j}, \end{aligned}$$

was wir mit $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$ auch in der Form

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi$$

zusammenfassen können.

Beim Fortschreiten in *radial*er Richtung ist $\varphi = \text{const}$, also $d\varphi = 0$, und aus $d\vec{r}$ wird der Tangentenvektor

$$\begin{aligned} d_r \vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} \right) dr \\ &= (\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) dr \\ &= \vec{e}_r dr. \end{aligned}$$

Entsprechend ist beim Fortschreiten in *azimutal*er Richtung $r = \text{const}$, also $dr = 0$, und der Vektor $d\vec{r}$ wird zu dem Tangentenvektor

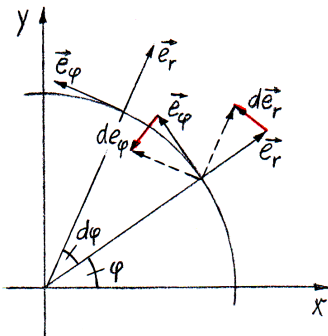
$$\begin{aligned} d_\varphi \vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{j} \right) d\varphi \\ &= r(-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) d\varphi \\ &= \vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die beiden Tangenten-Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

eingeführt. Beide Vektoren stehen senkrecht aufeinander, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$, weshalb die Polarkoordinaten ein Beispiel für *Orthogonalkoordinaten* sind.

Es ist zu beachten, daß beide Einheitsvektoren im Gegensatz zu $\vec{i}$ und $\vec{j}$ nicht konstant sind, sondern wegen ihrer Abhängigkeit vom Azimutwinkel ihre Richtung ändern.



Eine einfache Berechnung ergibt

$$\frac{d}{d\varphi} \vec{e}_r = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j} = \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{d\varphi} \vec{e}_\varphi = -\cos \varphi \cdot \vec{i} - \sin \varphi \cdot \vec{j} = -\vec{e}_r,$$

aber $\frac{d}{dr} \vec{e}_r = 0 = \frac{d}{dr} \vec{e}_\varphi.$

Das Linienelement Der Ortsvektor eines Punktes in der Ebene ist in Polarkoordinaten

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r(\varphi).$$

Mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ können wir den infinitesimalen Abstand zweier Punkte P_1 und P_2 in der Form

$$d\vec{r} = d_r \vec{r} + d_\varphi \vec{r}$$

$$= \vec{e}_r dr + \vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi$$

schreiben. Das Betragsquadrat dieses Vektors ist das Quadrat

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

des *Linienelements*¹. Dieses Linienelement oder infinitesimale Abstandsquadrat charakterisiert die Polarkoordinaten vollständig. Daß es sich um Orthogonalkoordinaten handelt, sieht man hier daran, daß keine Mischterme proportional zu $dr \cdot d\varphi$ auftreten.

Die *Bogenlänge* zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 einer in der (x, y) -Ebene liegenden Kurve $y = y(x)$ ist in kartesischen Koordinaten durch das Linienintegral

$$s(P_1, P_2) = \int_C ds = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

gegeben. Bei Parametrisierung durch den Azimutwinkel φ ist die entsprechende Formel in Polarkoordinaten

$$s(P_1, P_2) = \int_C ds = \int_C \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi$$

mit $r = r(\varphi)$ als der Polargleichung der in Rede stehenden Kurve C .

¹Das Symbol ds^2 ist als $(ds)^2$ zu lesen und nicht als $d(s^2) = 2s ds$.

Beispiel: Der Kreis

Der Kreis hat die besonders einfache, von φ unabhängige Polargleichung $r = R = \text{const}$. Damit erhalten wir in Polarkoordinaten sofort

$$s(\varphi_1, \varphi_2) = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = R(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Diese Beziehung ist die Grundlage für die Definition des Bogenmaßes eines Winkels. Für $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$ folgt der Kreisumfang $2\pi R$. In kartesischen Koordinaten gestaltet sich die Rechnung wesentlich aufwendiger. Aus der Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ des Kreises folgt zunächst $y' = -\frac{x}{y}$ und damit

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$

Dieses Integral wird mit der trigonometrischen Substitution $x = R \cos \varphi$ weiterbehandelt, die nichts anderes bedeutet als die Einführung von Polarkoordinaten. Es ist also vorteilhaft, von vornherein in diesen Koordinaten zu rechnen.

Das Flächenelement Gemäß der Bedeutung des Vektorprodukts ist das von den Tangentenvektoren $d_r \vec{r}$ und $d_\varphi \vec{r}$ aufgespannte, orientierte Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= d_r \vec{r} \times d_\varphi \vec{r} \\ &= (\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) \times (-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) dr \cdot r d\varphi, \end{aligned}$$

also

$$\boxed{d\vec{f} = \vec{k} \cdot r dr d\varphi}.$$

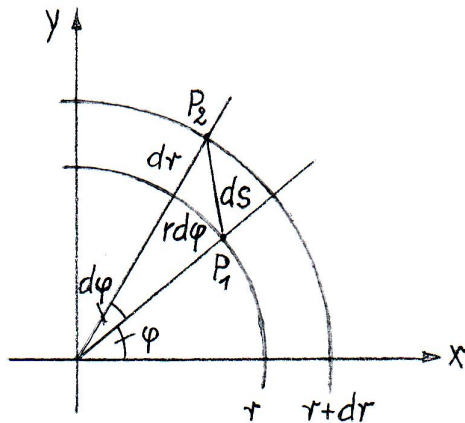
Beispiel: Die Kreisfläche

Der Betrag der von einem Kreis mit dem Radius $r = R = \text{const}$ umschlossenen Fläche berechnet sich in Polarkoordinaten gemäß

$$\begin{aligned} A &= \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} r dr d\varphi = \left[\int_{r=0}^R r dr \right] \cdot \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right] \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2. \end{aligned}$$

Das ist sehr viel einfacher als die entsprechende Flächenberechnung in kartesischen Koordinaten. Die Integrationsgrenzen sind fest, das Doppelintegral kann faktorisiert werden. Der Grund dafür ist, daß die Kreislinie mit einer Koordinatenlinie $r = \text{const}$ zusammenfällt.

Anmerkung Auch ohne Benutzung der Tangentenvektoren der Koordinatenlinien lassen sich das Linienelement und der Betrag des Flächenelementes aus der Abbildung ablesen.



Das Linienelement ds folgt direkt aus dem „infinitesimalen Pythagoras“.

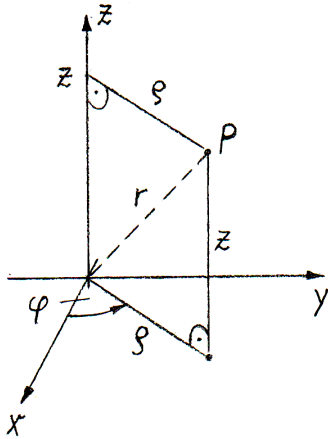
Der Betrag des Flächenelements ergibt sich elementar-geometrisch aus der Fläche eines Kreissegments, das der durch den Öffnungswinkel $d\varphi$ bestimmte Teil eines Kreisrings zwischen den Radien r und $(r + dr)$ ist, wie folgt:

$$\begin{aligned} df &= \frac{d\varphi}{2\pi} \cdot \pi [(r + dr)^2 - r^2] \\ &= r \, dr \, d\varphi \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dr}{r} \right) \\ &\longrightarrow r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

Dabei haben wir für ein infinitesimales Flächenelement $\frac{dr}{r}$ gegenüber 1 vernachlässigt.

4.2 Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z)

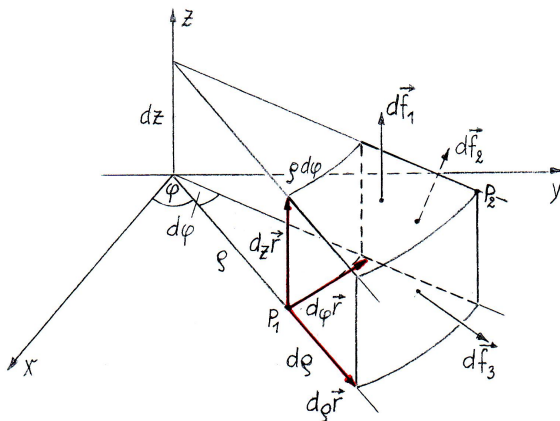
Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten Zylinderkoordinaten bestehen aus den ebenen Polarkoordinaten, die in zur (x, y) -Ebene parallelen Ebenen liegen sollen, vermehrt um die kartesische Koordinate z .



Da wir auch weiterhin den Ortsvektor eines Punktes im Raum mit $\vec{r}$ und den Abstand vom Koordinatenursprung mit $r = |\vec{r}|$ bezeichnen wollen, nennen wir den Abstand von der z -Achse nun ϱ . Bei den ebenen Polarkoordinaten bedeutet dies keinen Unterschied. Es besteht also der Zusammenhang

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= z. \end{aligned}$$

Tangentenvektoren der Koordinatenlinien Die Koordinatenlinien für $z = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ sind Ursprungsgeraden $y = \tan \varphi \cdot x$, die in der Höhe z in der zur (x, y) -Ebene parallelen Ebene liegen. Die Koordinatenlinien für $z = \text{const}$ und $\varrho = \text{const}$ sind in den genannten Ebenen liegende Kreise $x^2 + y^2 = \varrho^2$. Schließlich sind Koordinatenlinien für $\varrho = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ Geraden, die parallel zur z -Achse verlaufen. Dementsprechend sind die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien



- $z = \text{const}, \varphi = \text{const}$:

$$d_\varrho \vec{r} = \vec{e}_\varrho d\varrho$$

- $z = \text{const}, \varrho = \text{const}$:

$$d_\varphi \vec{r} = \vec{e}_\varphi \cdot \varrho d\varphi.$$

Darin ist der Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi$ wie bei den ebenen Polarkoordinaten, und $\vec{e}_\varrho$ entspricht $\vec{e}_r$. Hinzu kommt

- $\varrho = \text{const}, \varphi = \text{const}$:

$$d_z \vec{r} = \vec{e}_z dz \equiv \vec{k} dz.$$

Das Linienelement Der Ortsvektor eines Punktes im Raum und sein Abstand vom Koordinatenursprung sind

$$\vec{r} = \varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{k} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}.$$

Daraus resultiert der Abstandsvektor

$$d\vec{r} = \vec{e}_\varrho d\varrho + \varrho d\vec{e}_\varrho + \vec{k} dz,$$

der zwei infinitesimal benachbarte Punkte verbindet. Mit $d\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi d\varphi$ wird

$$d\vec{r} = \vec{e}_\rho d\rho + \rho \vec{e}_\varphi d\varphi + \vec{k} dz = d_\rho \vec{r} + d_\varphi \vec{r} + d_z \vec{r}.$$

Das Betragsquadrat dieses Vektors ist das Quadrat

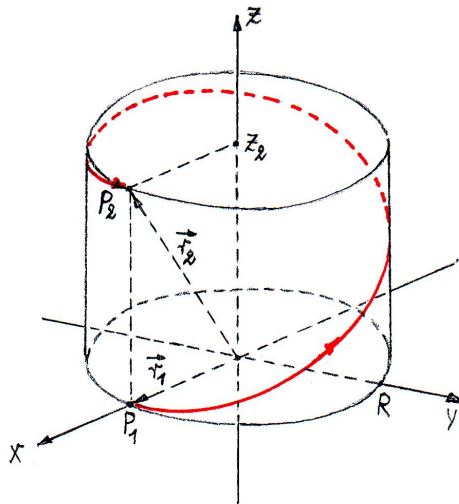
$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

des Linienelements ds .

Beispiel: Wir berechnen in Zylinderkoordinaten die Bogenlänge einer Windung der früher als Integrationsweg benutzten Kreisspirale (Schraubenlinie)

$$\vec{r} = R \cos \omega t \cdot \vec{i} + R \sin \omega t \cdot \vec{j} + ct \cdot \vec{k} \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad c = \text{const.}$$

Diese Parametrisierung durch t entspricht bereits der Einführung von Zylinderkoordinaten mit $\rho = R = \text{const}$, $\varphi = \omega t$ und $z = ct$ in die kartesischen Komponenten von $\vec{r}$.



Damit wird

$$\begin{aligned} s &= \int_C ds = \int_C \sqrt{R^2 d\varphi^2 + dz^2} \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} \sqrt{R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} dt \\ &= \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} \int_0^{2\pi/\omega} dt \\ &= \sqrt{4\pi^2 R^2 + z_2^2} \end{aligned}$$

$$\text{mit } z_2 = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Wie es sein muß, ergeben sich für $z = c = 0$ die Polarkoordinaten als Spezialfall, und die Bogenlänge $s = 2\pi R$ ist der Kreisumfang. Für $c \gg R\omega$ wird $s \approx z_2$. Anstelle der Variablen t hätten wir auch φ oder $z = \frac{c}{\omega} \varphi$ als Parameter für das Linienintegral verwenden können, was natürlich keine Auswirkung auf das Ergebnis gehabt hätte.

Die Flächenelemente Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, kommen zu dem von den ebenen Polarkoordinaten her bekannten Flächenelement zwei weitere hinzu.

- $z = \text{const}$:

$$df_1 = d_\rho \vec{r} \times d_\varphi \vec{r} = (\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi) \rho d\rho d\varphi = \vec{k} \cdot \rho d\rho d\varphi,$$

wie bei den ebenen Polarkoordinaten. Wenn $\vec{k}$ die äußere Normale sein soll, wird durch dieses Flächenelement die Deckfläche des Volumenelements beschrieben.

- $\varphi = \text{const}$:

$$df_2 = d_z \vec{r} \times d_\rho \vec{r} = (\vec{k} \times \vec{e}_\rho) d\rho dz = \vec{e}_\varphi \cdot d\rho dz,$$

- $\varrho = \text{const:}$

$$d\vec{f}_3 = d_\varphi \vec{r} \times d_z \vec{r} = (\vec{e}_\varphi \times \vec{k}) \varrho \, d\varphi \, dz = \vec{e}_\varrho \cdot \varrho \, d\varphi \, dz.$$

Dies ist das Flächenelement für die Mantelfläche eines Zylinders. Mit $\varrho = R$ und $0 \leq z \leq h$ ist der Betrag dieser Mantelfläche $A_{\text{Mantel}} = 2\pi R \cdot h$, also eine Rechteckfläche mit der Grundlinie $2\pi R$ und der Höhe h .

Das Volumenelement Das Volumen des von den paarweise orthogonalen Tangentenvektoren $d_\varrho \vec{r}$, $d_\varphi \vec{r}$ und $d_z \vec{r}$ aufgespannten Parallelepipeds ist durch das Spatprodukt

$$\begin{aligned} dV &= (d_\varrho \vec{r} \times d_\varphi \vec{r}) \cdot d_z \vec{r} = d\vec{f}_1 \cdot d_z \vec{r} \\ &= d\varrho \cdot \varrho \, d\varphi \cdot dz \end{aligned}$$

in der Form („Grundfläche $\times$ Höhe“) gegeben. Dieses Resultat kann auch sofort aus der Abbildung abgelesen werden. Die durch zyklische Vertauschung der Variablen entstehenden beiden anderen Spatprodukte führen auf das gleiche Ergebnis.

Beispiel: Zylindervolumen

Das Zylindervolumen ist mit festen Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned} V &= \int_{\text{Zylinder}} dV = \int_0^R \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot h = \pi R^2 h, \end{aligned}$$

also wieder „Grundfläche $\pi R^2 \times$ Höhe h “. Dies ist ein deutlich eleganterer Weg als die Berechnung des Zylindervolumens in kartesischen Koordinaten,

$$V = \underbrace{\iint dx \, dy}_{\text{Grundfläche}} \cdot \int_0^h dz,$$

wo das Doppelintegral zur Berechnung der Grundfläche nicht faktorisiert werden kann (siehe Berechnung der Kreisfläche).

4.3 Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

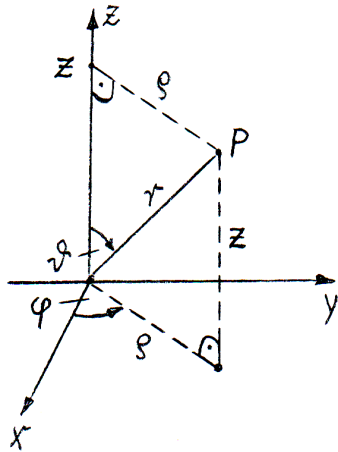
Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten

Die Behandlung der Kugelkoordinaten beginnen wir mit den Zylinderkoordinaten, um die Position eines Punktes P im Raum zu beschreiben. Diese sind

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi \quad \text{und} \quad z = z.$$

Die Koordinaten ϱ und φ sind Polarkoordinaten in der zur (x, y) -Ebene parallelen Ebene in der Höhe z .

Nun fassen wir den Punkt P als Punkt auf der Oberfläche einer Kugel auf, und ϱ sei der Radius des – geographisch gesprochen – Breitenkreises, auf dem dieser Punkt liegt. Diesen Radius drücken wir mit Hilfe des Winkels ϑ durch den Kugelradius r aus.



Wir lesen ab:

$$\varrho = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta.$$

Damit resultiert der Zusammenhang

$\begin{aligned} x &= (r \sin \vartheta) \cos \varphi \\ y &= (r \sin \vartheta) \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$

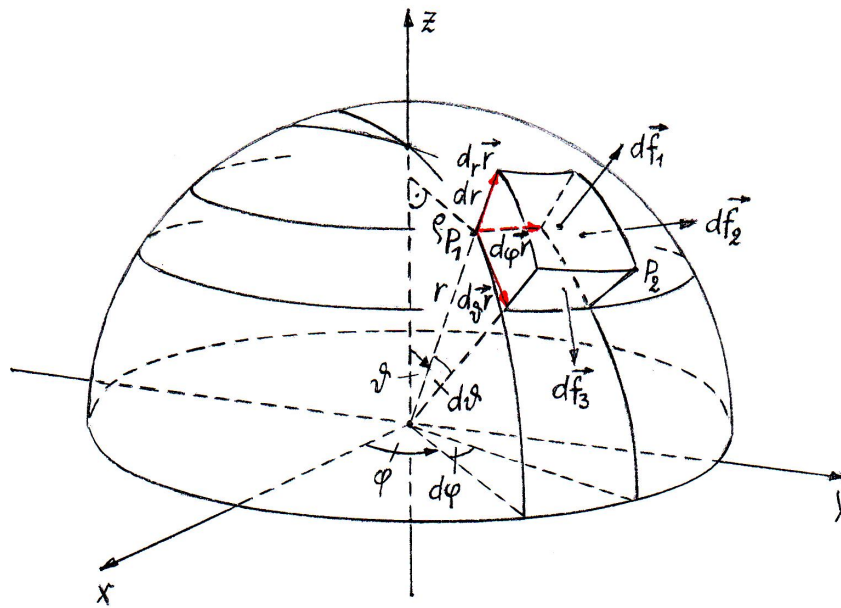
zwischen den kartesischen Koordinaten und den Kugelkoordinaten r , ϑ und φ .

Darin ist $r \geq 0$ der Abstand vom Koordinatenursprung (Mittelpunkt der Kugel), $0 \leq \vartheta \leq \pi$ die *Poldistanz* (der Winkel $(90^\circ - \vartheta)$ ist die geographische Breite) und $0 \leq \varphi < 2\pi$ der Azimutwinkel (nach Festlegung des Nullpunktes die geographische Länge). Die Intervallgrenzen der beiden Winkel sind dabei so, daß jeder Punkt einer Kugel genau einmal erfaßt wird.

Die Umkehrung dieses Zusammenhangs ist

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \\ \cos \vartheta &= \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

Tangentenvektoren der Koordinatenlinien



φ : Azimut, ϑ : Poldistanz

Der Ortsvektor des Punktes P ist

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r(\vartheta, \varphi).$$

Die Koordinatenlinien sind räumliche Ursprungsgeraden (Radien) in radialer Richtung, Breitenkreise der Kugel in azimuthaler Richtung und Längskreise (Meridiankreise) in meridionaler Richtung.

Der Abstandsvektor zweier infinitesimal benachbarter Punkte P_1 und P_2 ist

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Beim Fortschreiten in *radial*er Richtung ($\vartheta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$) haben wir

$$\begin{aligned} d_r \vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right) dr \\ &= (\sin \vartheta \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \cdot \vec{j} + \cos \vartheta \cdot \vec{k}) dr \\ &= \vec{e}_r dr. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise ergibt sich in *azimutal*er Richtung ($r = \text{const}$ und $\vartheta = \text{const}$)

$$\begin{aligned} d_\varphi \vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi = r \sin \vartheta (-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) d\varphi \\ &= \vec{e}_\varphi \cdot r \sin \vartheta \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Darin ist $r \sin \vartheta = \varrho$ der Radius des zu den festen Werten von r und ϑ gehörenden Breitenkreises.

In *meridionaler* Richtung ($r = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$) ist schließlich

$$\begin{aligned} d_{\vartheta} \vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta = r \left(\cos \vartheta \cos \varphi \cdot \vec{i} + \cos \vartheta \sin \varphi \cdot \vec{j} - \sin \vartheta \cdot \vec{k} \right) d\vartheta \\ &= \vec{e}_{\vartheta} \cdot r d\vartheta. \end{aligned}$$

Hier haben wir die paarweise orthogonalen Tangenten-Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin \vartheta \left(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j} \right) + \cos \vartheta \cdot \vec{k} \\ \vec{e}_{\vartheta} &= \cos \vartheta \left(\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j} \right) - \sin \vartheta \cdot \vec{k} \\ \vec{e}_{\varphi} &= -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

eingeführt. Deren Richtungsänderungen werden durch die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta} &= \vec{e}_{\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \vartheta \cdot \vec{e}_{\varphi} \\ \frac{\partial \vec{e}_{\vartheta}}{\partial \vartheta} &= -\vec{e}_r \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{e}_{\vartheta}}{\partial \varphi} = \cos \vartheta \cdot \vec{e}_{\varphi} \\ \frac{d\vec{e}_{\varphi}}{d\varphi} &= -(\vec{e}_r \sin \vartheta + \vec{e}_{\vartheta} \cos \vartheta) \end{aligned}$$

beschrieben. Diese Relationen ergeben sich durch Differentiation der vorstehenden Formeln, in denen die Tangenten-Einheitsvektoren durch die raumfesten kartesischen Vektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ ausgedrückt sind. Der Leser ist aber aufgerufen, sich diese Beziehungen anhand der Abbildung auch anschaulich zu verdeutlichen, so, wie wir es für die Polarkoordinaten vorgeführt haben.

Das Linienelement Damit ist der Abstand zweier infinitesimal benachbarter Punkte P_1 und P_2 , geschrieben mit diesen Einheitsvektoren,

$$d\vec{r} = \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_{\vartheta} \cdot r d\vartheta + \vec{e}_{\varphi} \cdot r \sin \vartheta d\varphi,$$

und das Quadrat des Linienelements ds wird

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2.$$

Die Flächenelemente

- $r = \text{const}$: Mit dieser Bedingung resultiert das Flächenelement der Kugeloberfläche

$$df_1 = d_{\vartheta} \vec{r} \times d_{\varphi} \vec{r} = \vec{e}_r \cdot r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Beispiel: Flächeninhalt der Kugeloberfläche

Der Radius der Kugel sei R . Dann ist ihre Oberfläche

$$\begin{aligned} A_{\text{Kugel}} &= R^2 \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= R^2 (-\cos \vartheta) \Big|_0^\pi \cdot 2\pi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

- $\varphi = \text{const.}$

$$d\vec{f}_2 = d_r \vec{r} \times d_\vartheta \vec{r} = \vec{e}_\varphi \cdot r \, dr \, d\vartheta.$$

Das ist offensichtlich das Flächenelement eines Kreises, in diesem Fall des zu dem konstanten Winkel φ gehörenden Meridiankreises.

- $\vartheta = \text{const.}$

$$d\vec{f}_3 = d_\varphi \vec{r} \times d_r \vec{r} = \vec{e}_\vartheta \cdot r \sin \vartheta \, dr \, d\varphi.$$

Das ist das Flächenelement der Mantelfläche eines Kreiskegels mit seiner Spitze im Koordinatenursprung und dem halben Öffnungswinkel $\vartheta = \text{const.}$

Beispiel: Wir berechnen den Flächeninhalt dieser Mantelfläche.

Der Radius der Kugel und damit die Länge der Mantellinie des Kegels sei R , der konstante Winkel ϑ sei ϑ_0 . Dann ist die Mantelfläche

$$A_{\text{Mantel}} = \sin \vartheta_0 \int_0^R r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R (R \sin \vartheta_0),$$

worin der in Klammern stehende Ausdruck den Radius ϱ_0 der kreisförmigen Grundfläche des Kegels bedeutet.

Das Volumenelement Das Volumenelement ergibt sich beispielsweise aus dem Spatprodukt

$$(d_\vartheta \vec{r} \times d_\varphi \vec{r}) \cdot d_r \vec{r} = d\vec{f}_1 \cdot d_r \vec{r}$$

zu

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Dieses Volumenelement läßt sich auch direkt aus der Abbildung in der Form

$$dV = (r \, d\vartheta \cdot r \sin \vartheta \, d\varphi) \cdot dr$$

ablesen.

Beispiel: Kugelvolumen

Das Volumen des von einer Kugel mit dem Radius R umschlossenen Raumes berechnet sich mit festen Integrationsgrenzen zu

$$V = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Die Auswertung der beiden Winkelintegrale ergibt 4π , die Oberfläche der Einheitskugel (siehe oben). Das Volumen ist somit

$$V = \frac{R^3}{3} \cdot 4\pi = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Im Vergleich mit kartesischen Koordinaten ist dies eine sehr viel einfachere Berechnung des Kugelvolumens.

4.4 Zusätzlicher Inhalt: Die Jacobi-Determinante

Wir betrachten noch einmal die Volumenelemente dV in Zylinder- und Kugelkoordinaten. Diese Koordinaten bezeichnen wir wie in der Tabelle angegeben.

	x_1	x_2	x_3
kartesisch	x	y	z
Zylinder	ϱ	φ	z
Kugel	r	ϑ	φ

Um den Formelsatz einfach zu halten, schreiben wir für die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien $d_1\vec{r} \equiv d_{x_1}\vec{r}$ und entsprechend für die anderen Koordinaten und Indizes. Es ist also beispielsweise in Kugelkoordinaten $d_1\vec{r} \equiv d_r\vec{r}$. Die Tangentenvektoren $d_1\vec{r}$, $d_2\vec{r}$ und $d_3\vec{r}$ spannen ein Parallelepiped auf, das im Fall von Orthogonalkoordinaten rechtwinklig, also ein Quader ist. Das Folgende ist nicht auf Zylinder- und Kugelkoordinaten, nicht einmal auf Orthogonalkoordinaten beschränkt.

Das Volumenelement ist durch das Spatprodukt

$$dV = |(d_1\vec{r} \times d_2\vec{r}) \cdot d_3\vec{r}|$$

oder eine seiner beiden zyklischen Vertauschungen gegeben. Mit $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ist

$$d_3\vec{r} \cdot (d_1\vec{r} \times d_2\vec{r}) = \left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_3}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial x_3}\vec{k} \right) dx_3 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{vmatrix} dx_1 dx_2.$$

Die Ausführung des Skalarprodukts führt zunächst auf

$$\frac{\partial x}{\partial x_3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{vmatrix} - \frac{\partial y}{\partial x_3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck kann als dreireihige Determinante geschrieben und nach den Regeln für die Vertauschung von Zeilen einer Determinante weiter umgeformt werden, sodaß wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

erhalten. (Probe: Wenn wir diese Determinante nach ihrer ersten Zeile entwickeln, kommen wir auf den ursprünglichen Ausdruck zurück.) Vertauschen wir nun noch Zeilen und Spalten, gelangen wir zu dem Ergebnis

$$d_3 \vec{r} \cdot (d_1 \vec{r} \times d_2 \vec{r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial x}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_3} \end{vmatrix} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Diese leicht einprägsame Determinante schreiben wir symbolisch in der Form

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

auf. Sie heißt *Jacobi-Determinante*.

Das Volumenelement ist also in krummlinigen Koordinaten

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \right| dx_1 dx_2 dx_3,$$

was natürlich die kartesischen Koordinaten als trivialen Spezialfall einschließt.

Anmerkung In zwei Dimensionen beschreibt die Jacobi-Determinante den Betrag des Flächenelements,

$$df = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, x_2)} \right| dx_1 dx_2.$$

Beispiel Die Jacobi-Determinante ist in Zylinder- und Polarkoordinaten

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

5 Der Greensche Satz

Gegenstand dieses Abschnittes soll die Frage sein, wie das Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{\phi}$ über einen geschlossenen Weg C mit einem Flächenintegral über das Gebiet G , das von diesem geschlossenen Weg umrandet wird, zusammenhängt.

5.1 Herleitung des Greenschen Satzes

Wir berechnen für das zweikomponentige Vektorfeld

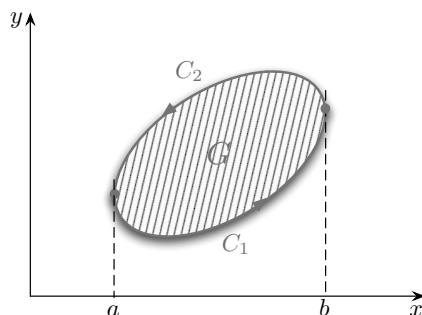
$$\vec{\phi} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

in der (x, y) -Ebene das Linienintegral

$$\oint_C \vec{\phi} \, d\vec{r} = \oint_C (P \, dx + Q \, dy)$$

in zwei Schritten.

Schritt 1: $\oint_C P(x, y) \, dx$



G : Gebiet

$C_1 : y = f_1(x), C_2 : y = f_2(x)$

Es ist

Das Gebiet G soll so beschaffen sein, daß wir seine Randkurve C durch zwei Parallelen zur Ordinatenachse an den Stellen $x = a$ und $x = b$ in zwei Teile C_1 und C_2 zerlegen können, die durch die Funktionen $y = f_1(x)$ bzw. $y = f_2(x)$ beschreibbar sein sollen. (Komplizierter geformte Grundgebiete: siehe später.) Überall auf C_1 ist $y = f_1(x)$, und auf C_2 ist $y = f_2(x)$. Die Kurve $C = C_1 + C_2$ wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y) \, dx &= \int_{C_1} P \, dx + \int_{C_2} P \, dx \\ &= \int_a^b P[x, f_1(x)] \, dx + \int_b^a P[x, f_2(x)] \, dx \\ &= \int_a^b \left\{ P[x, f_1(x)] - P[x, f_2(x)] \right\} \, dx. \end{aligned}$$

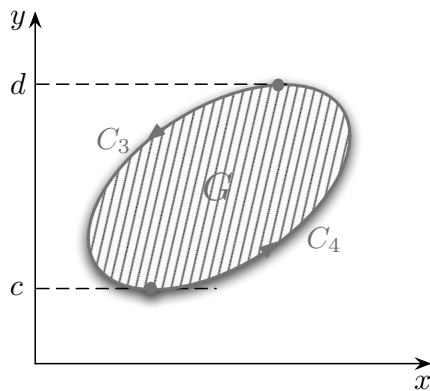
Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx \\ &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \left\{ P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)] \right\} dx. \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt

$$\oint_C P dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Schritt 2: $\oint_C Q(x, y) dy$



Da nun die y -Integration auszuführen ist, vertauschen Abszisse und Ordinate ihre Rollen. Dementsprechend zerlegen wir die Randkurve C durch zwei Parallelen zur x -Achse bei $y = c$ und $y = d$ in zwei Teile C_3 und C_4 , die durch die Funktionen $x = f_3(y)$ und $x = f_4(y)$ beschrieben werden. Die Kurve $C = C_3 + C_4$ wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

G : gleiches Gebiet

$C_3 : x = f_3(y), C_4 : x = f_4(y)$

Es ist

$$\begin{aligned} \oint_C Q(x, y) dy &= \int_c^d Q[f_4(y), y] dy + \int_d^c Q[f_3(y), y] dy \\ &= \int_c^d \left\{ Q[f_4(y), y] - Q[f_3(y), y] \right\} dy. \end{aligned}$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{f_3(y)}^{f_4(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy \\ &= \int_c^d \left\{ Q[f_4(y), y] - Q[f_3(y), y] \right\} dy. \end{aligned}$$

Der Vergleich zeigt

$$\oint_C Q dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Beide Schritte zusammen ergeben die Aussage des *Green'schen Satzes*, daß wir – zunächst in zwei Dimensionen – das Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{\phi} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ über einen geschlossenen Weg C durch ein Flächenintegral über das Gebiet G ersetzen können, das von diesem geschlossenen Weg umrandet wird, wenn wir den Integranden aus den Komponenten P und Q von $\vec{\phi}$ gemäß $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ bilden. In Formeln:

$$\oint_C \vec{\phi} \, d\vec{r} = \oint_C (P \, dx + Q \, dy) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

5.2 Beispiele

Beispiel 1: Konservatives Kraftfeld

Das Vektorfeld $\vec{\phi}$ sei ein Kraftfeld $\vec{F}$ in zwei Dimensionen mit den Komponenten $P = F_x$ und $Q = F_y$. Dann ist die Arbeit entlang des geschlossenen Weges C

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = \oint_C (F_x \, dx + F_y \, dy) = \iint_G \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

Für $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$ ist $\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = 0$ und somit $\vec{F}$ eine konservative Kraft.

Beispiel 2: Der Flächeninhalt als Linienintegral

Es sei $P = -y$ und $Q = x$. Dann ist nach dem Greenschen Satz,

$$\oint_C (x \, dy - y \, dx) = 2 \iint_G \, dx \, dy$$

und damit ist der Flächeninhalt A_G des umrandeten Gebietes G

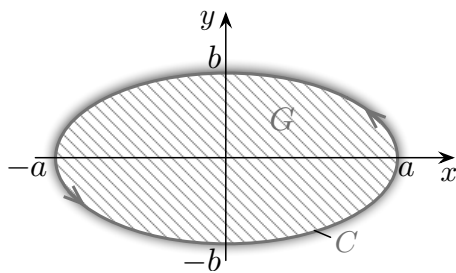
$$A_G = \frac{1}{2} \oint_C (x \, dy - y \, dx).$$

Der Flächeninhalt A_G eines Gebietes läßt sich also auf ein Linienintegral entlang der dieses Gebiet umschließenden Randkurve C zurückführen.

Zur Illustration berechnen wir den Inhalt der von einer Ellipse umschlossenen Fläche. Mit der

Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ als Randkurve wird $C : y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

- Flächenintegral

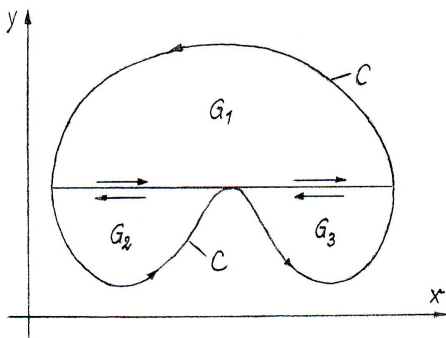


$$\begin{aligned}
 & \int_{-a}^a \left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \right] dx \\
 &= 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2} dx \\
 &= 4 \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a \\
 &= 2 \frac{b}{a} \cdot a^2 \arcsin 1 = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab
 \end{aligned}$$

• Linienintegral

Mit $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $dy = -\frac{b}{a} \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ haben wir für den unteren Ellipsenbogen y durch $-y$ und dy durch $d(-y)$ zu ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{b}{a} \int_{-a}^a \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} \right) dx}_{\text{unterer Ellipsenbogen}} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{b}{a} \int_a^{-a} \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} \right) dx}_{\text{oberer Ellipsenbogen}} \\
 &= \frac{b}{a} \int_{-a}^a \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} \right) dx = ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
 &= 2ab \cdot \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab.
 \end{aligned}$$



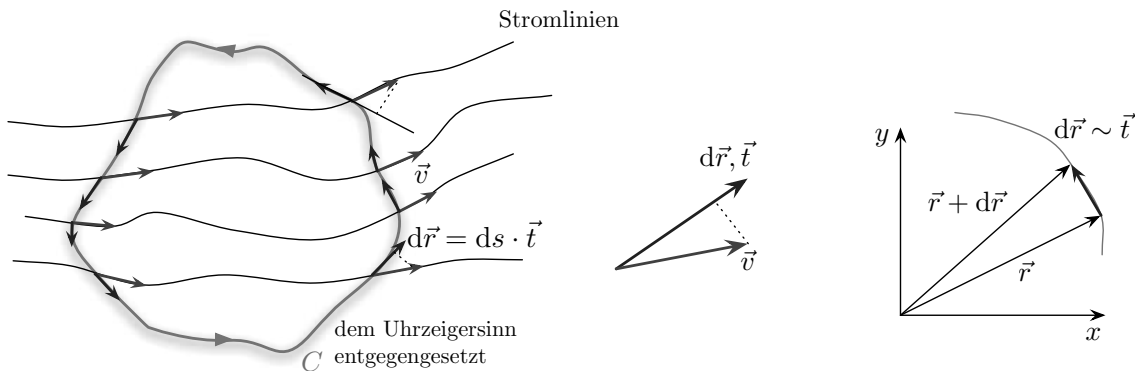
Anmerkung Bei komplizierten Grundgebieten G zerlegen wir das Gebiet gemäß $G = G_1 + G_2 + \dots$ in Teilgebiete G_i , die so beschaffen sind wie in den bisherigen Beispielen. Der Greensche Satz wird nun auf jedes Teilgebiet $G_1, G_2, \dots$ angewandt. Die Linienintegrale an den inneren Grenzen heben sich dabei auf, sodaß das Kurvenintegral entlang der Kurve C übrigbleibt.

6 Der Stokessche Satz, Zirkulation und Rotation

Wir werden im folgenden den Greenschen Satz auf drei Dimensionen erweitern. Dazu beginnen wir mit einer Interpretation der Begriffe aus dem Greenschen Satz (zweidimensional) am Beispiel der Hydrodynamik.

6.1 Die Zirkulation eines Vektorfeldes

Das Vektorfeld $\vec{\phi}$ fassen wir als Strömungs- oder Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ auf.



Eine Kurve C werde von diesem Strömungsfeld $\vec{v}$ durchflossen. Beide liegen in der gleichen Ebene. Die Strömungsgeschwindigkeit ist $\vec{v}$, der Tangenten-Einheitsvektor der Kurve C ist der Vektor $\vec{t}$, sodaß $d\vec{r} = ds \cdot \vec{t}$ und $|d\vec{r}| = ds$ das Bogenelement der Kurve ist. Damit ist das Linienintegral

$$\oint_C \vec{v} d\vec{r} = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{t}) ds$$

die Summe der *Tangential*komponenten von $\vec{v}$ entlang der Kurve C . (Dabei ist $d\vec{r}$ das infinitesimale Abstandselement zweier Punkte der Kurve C und nicht der Stromlinien. Es gilt also *nicht* $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.) Das Linienintegral entlang C kann größer, kleiner oder gleich Null sein,

$$\oint \vec{v} d\vec{r}$$

$$\begin{cases} > 0, \text{ falls } \angle(\vec{v}, d\vec{r}) \text{ überwiegend spitz; Strömung „netto“ entgegen Uhrzeigersinn} \\ = 0, \text{ falls keine „Netto-Drehung“ der Flüssigkeit in Bezug auf } C \\ < 0, \text{ falls } \angle(\vec{v}, d\vec{r}) \text{ überwiegend stumpf; Strömung „netto“ im Uhrzeigersinn.} \end{cases}$$

Wir bezeichnen deshalb

$$\oint_C \vec{\phi} \, d\vec{r} = \oint_C (\vec{\phi} \cdot \vec{t}) \, ds$$

als „Zirkulation von $\vec{\phi}$ entlang C “ und haben damit ein Maß für die *Umströmung* der Kurve C .

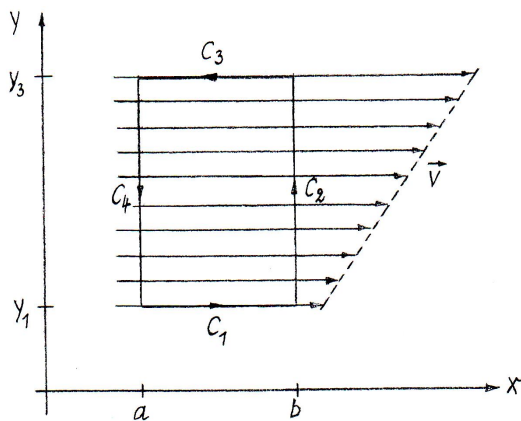
Je nach Bedeutung des Vektorfeldes $\vec{\phi}$ finden wir andere Begriffe für die Zirkulation, wobei es sich um die gleiche mathematische Konstruktion handelt. Ist beispielsweise $\vec{\phi} = \vec{F}$ eine Kraft, ist die „Zirkulation der Kraft“ die Arbeit. Ist $\vec{\phi} = \vec{E}$ die elektrische Feldstärke, ist die „Zirkulation der Feldstärke“ die Umlaufspannung. Im direkten Sinne anschaulich ist die Zirkulation, wenn (wie oben) $\vec{\phi} = \vec{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit ist.

6.2 Beispiele für ebene Strömungen

Zur Verifikation des Greenschen Satzes sollen nun einige Beispiele dienen.

Beispiel 1: Die lineare Strömung $\vec{v} = \alpha y \cdot \vec{i}$ mit $\alpha > 0$

Es ist $P = \alpha y$, $Q = 0$ und $\vec{v} \cdot d\vec{r} = \alpha y \cdot dx$. In Worten: Die Strömung verläuft in Richtung der x -Achse und nimmt dem Betrag nach senkrecht zur Strömungsrichtung linear zu. Die Kurve C besteht aus den vier Rechteckseiten $C_1, \dots, C_4$, die paarweise parallel und senkrecht zu den Stromlinien liegen.



- Zirkulation (Linienintegral)

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \, d\vec{r} &= \underbrace{\int_{C_1} \vec{v} \, d\vec{r}}_{\substack{a \leq x \leq b \\ y = y_1}} + \underbrace{\int_{C_2} \vec{v} \, d\vec{r}}_{\substack{dx = 0 \\ b \geq x \geq a}} + \underbrace{\int_{C_3} \vec{v} \, d\vec{r}}_{\substack{b \geq x \geq a \\ y = y_3}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{C_4} \vec{v} \, d\vec{r}}_{dx = 0} \\ &= \alpha y_1 \int_a^b dx + 0 + \alpha y_3 \int_b^a dx + 0 \\ &= \alpha(y_1 - y_3)(b - a) < 0 \end{aligned}$$

Dies entspricht einer Netto-Strömung *im Uhrzeigersinn*, was auch durch die Abbildung direkt nahegelegt wird.

- Flächenintegral

Es ist $\frac{\partial P}{\partial y} = \alpha$ und $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy &= -\alpha \iint_G dx \, dy \\ &= -\alpha \cdot A_G = \alpha(y_1 - y_3)(b - a). \end{aligned}$$

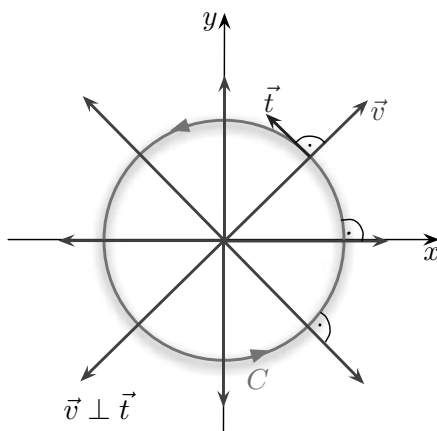
Darin ist $A_G = \alpha(y_3 - y_1)(b - a)$ der Flächeninhalt des rechteckigen Gebietes G , das von den Kurvenstücken $C_1, \dots, C_4$ umrandet wird.

Wir stellen Übereinstimmung fest.

Beispiel 2: Die radiale Strömung

$$\vec{v} = \alpha \vec{r} = \alpha(x \vec{i} + y \vec{j}), \quad \alpha \begin{cases} > 0 : \text{vom Zentrum weg} \\ < 0 : \text{zum Zentrum hin} \end{cases}$$

Die Kurve C sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Zentrum der Strömung zusammenfällt und der von den Stromlinien senkrecht durchsetzt wird.



- Zirkulation (Linienintegral)

Es ist auf dem Kreis C überall $\angle(\vec{v}, d\vec{r}) = \frac{\pi}{2}$ und damit $\vec{v} \cdot \vec{t} = v \cdot \cos \angle(\vec{v}, \vec{t}) = 0$. Somit ist

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Die Strömung ist damit *wirbelfrei*, d.h. die Flüssigkeit hat keine „Drehtendenz“ in Bezug auf die gegebene Kurve C .

- Flächenintegral

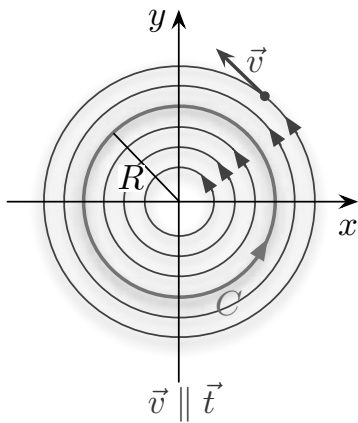
Es ist $P = \alpha x$ und $Q = \alpha y$ und damit $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, also

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Wir stellen Übereinstimmung fest.

Beispiel 3: Die starre Rotation $\vec{v} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ entgegen dem Uhrzeigersinn

Die Strömung erfolgt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ auf Kreisen. Die Strömungsgeschwindigkeit $v = \omega r$ nimmt linear mit dem Abstand r vom Zentrum zu. Die Kurve C sei einer dieser Kreise mit dem Radius R .



- Zirkulation (Linienintegral)

Überall auf der Kurve C ist $\angle(\vec{v}, d\vec{r}) = 0$ und damit $\cos \angle(\vec{v}, d\vec{r}) = 1$. Wir berechnen in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \, d\vec{r} &= \oint_C v \, ds \\ &= \oint_C \omega r \cdot r \, d\varphi = \omega R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi\omega R^2 > 0. \end{aligned}$$

- Flächenintegral

Es ist $P = -\omega y$ und $Q = \omega x$ und damit $\frac{\partial P}{\partial y} = -\omega$ und $\frac{\partial Q}{\partial x} = \omega$. Also ist

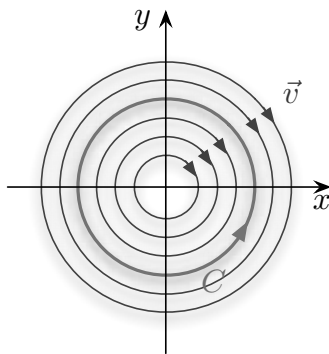
$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = 2\omega \iint_G dx \, dy = 2\omega \cdot \pi R^2.$$

Es ist $A_G = \pi R^2$ die Fläche des von der Kurve C umschlossenen Kreises.

Wir stellen Übereinstimmung fest.

Beispiel 4: Der „Abfluß“ im Uhrzeigersinn,

$$\vec{v} = \frac{\alpha y}{r^2} \vec{i} - \frac{\alpha x}{r^2} \vec{j} \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \quad \text{und} \quad v = \frac{\alpha}{r}.$$



Die Strömung erfolgt wiederum auf Kreisen, aber die Strömungsgeschwindigkeit v nimmt nun auf das Zentrum hin zu. Der wesentliche Unterschied zur starren Rotation besteht darin, daß $\vec{v}$ im Koordinatenursprung $(0,0)$ singulär ist. Die Kurve C sei einer dieser Kreise, der aber entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

- Zirkulation (Linienintegral)

Überall auf C ist $\angle(\vec{v}, d\vec{r}) = \pi$ und damit $\cos \angle(\vec{v}, d\vec{r}) = -1$, also

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \, d\vec{r} &= - \oint_C v \, ds = - \oint_C \frac{\alpha}{r} \cdot r \, d\varphi \\ &= -\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi\alpha < 0. \end{aligned}$$

- Flächenintegral

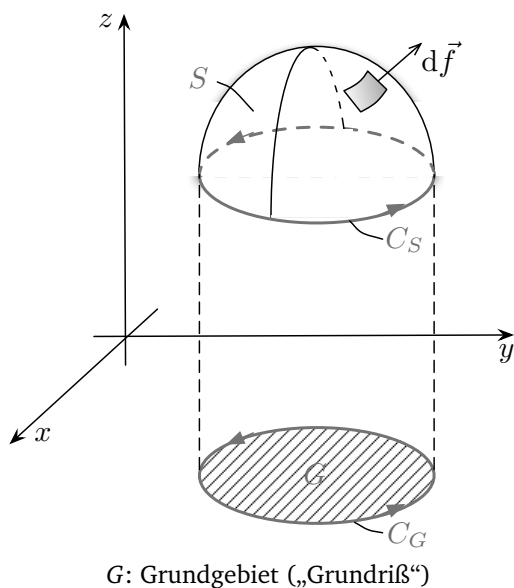
Es ist $P = \frac{\alpha y}{r^2}$ und $Q = -\frac{\alpha x}{r^2}$ mit $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\alpha}{r^2} \left(1 - 2\frac{y^2}{r^2}\right)$ und $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\alpha}{r^2} \left(1 - 2\frac{x^2}{r^2}\right)$, also

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = 2\alpha \iint_G \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^4} \right) dx \, dy = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt von $x^2 + y^2 = r^2$ Gebrauch gemacht haben.

Hier stellen wir erstmals keine Übereinstimmung fest. Die Frage ist nun, ob der Greensche Satz nicht erfüllt ist. Da P und Q in $(0,0)$ jedoch nicht definiert sind, ist dieser Satz hier *nicht anwendbar*. Die direkte Berechnung der Zirkulation als Linienintegral bleibt aber auch bei Singularitäten möglich.

6.3 Verallgemeinerung des Greenschen Satzes auf 3 Dimensionen



Wir vollziehen den Übergang vom zweidimensionalen zum dreidimensionalen Vektorfeld,

$$\vec{\phi} = P\vec{i} + Q\vec{j} \longrightarrow \vec{\phi} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

wobei im allgemeinen jede der Komponenten P , Q und R von jeder der Koordinaten x , y und z abhängt.

Die Fläche (surface) S werde durch eine Funktion $z = z(x, y)$ beschrieben. Ihre Projektion in die (x, y) -Ebene ist das Grundgebiet G mit seiner Randkurve C_G . Umgekehrt ist die Randkurve C_S von S das Bild der Kurve C_G bei der Abbildung $z = z(x, y)$. Anders als in der Abbildung muß die Randkurve C_S weder in einer zur (x, y) -Ebene parallelen Ebene noch überhaupt in einer Ebene liegen.

Wir berechnen zuerst die Zirkulation von $\vec{\phi}$ entlang der Randkurve C_S von S ,

$$\oint_{C_S} \vec{\phi} \, d\vec{r} = \oint_{C_S} (P \, dx + Q \, dy + R \, dz).$$

Wegen $z = z(x, y)$ haben wir

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Damit ergibt sich in den beiden Dimensionen der (x, y) -Ebene

$$\oint_{C_S} \vec{\phi} \, d\vec{r} = \oint_{C_G} \left[\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right].$$

Darauf wenden wir den Greenschen Satz in zwei Dimensionen mit $\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right)$ anstelle von P und $\left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ anstelle von Q an und erhalten

$$\oint_{C_S} \vec{\phi} \, d\vec{r} = \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dx \, dy.$$

Die Variablen x und y variieren im Grundgebiet G unabhängig voneinander und es ist zu beachten, daß $P = P[x, y, z(x, y)]$ ist, was ebenso für Q und R gilt. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} \oint_{C_S} \vec{\phi} \, d\vec{r} &= \iint_G \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + R \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - R \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] dx \, dy \\ &= \iint_G \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx \, dy. \end{aligned}$$

Das läßt sich als Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \oint_{C_S} \vec{\phi} \, d\vec{r} &= \iint_G \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \left[-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right] dx \, dy \end{aligned}$$

schreiben.

Anmerkung Für zwei Dimensionen mit $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $R = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}$ ist der Greensche Satz als Spezialfall richtig enthalten.

Diskussion der beiden Faktoren des Skalarprodukts

Faktor 1: $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$

Der erste Faktor hat offensichtlich die Struktur eines Vektorprodukts und kann symbolisch in Gestalt der Determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{\phi}$$

aufgeschrieben werden. Darin bezeichnet

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

den sogenannten *Nabla-Operator*. Es handelt sich um einen Vektor-Differentialoperator, der, angewandt auf eine skalare Funktion U , den Vektor $\text{grad } U \equiv \vec{\nabla} U$ ergibt.¹

Man bezeichnet $\vec{\nabla} \times \vec{\phi} \equiv \text{rot } \vec{\phi}$ als *Rotation* des Vektorfeldes $\vec{\phi}$.² Die Rotation eines Vektorfeldes ist nach Definition selbst wieder ein Vektor, nämlich

$$\text{rot } \vec{\phi} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Wie für ein Vektorprodukt typisch, ist dieser Vektor dadurch gekennzeichnet, daß in seiner x -Komponente weder nach der Variablen x abgeleitet wird noch daß die x -Komponente P des Vektors $\vec{\phi}$ vorkommt. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Komponenten.

Faktor 2: $-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}$

Wie wir bereits wissen, ist der zweite Faktor der *Normalenvektor* der durch $z = z(x, y)$ beschriebenen Fläche S und

$$d\vec{f} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) dx dy$$

ihr Flächenelement $d\vec{f}$.

Damit hat die Verallgemeinerung des Greenschen Satzes auf drei Dimensionen, der *Stokessche Satz*, die kompakte Gestalt

$$\oint_{C_S} \vec{\phi} d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{\phi} d\vec{f}.$$

In Worten: Die Zirkulation eines Vektorfeldes $\vec{\phi}$ um einen geschlossenen Weg C_S ist gleich dem Oberflächenintegral der Rotation von $\vec{\phi}$ auf einer Oberfläche S , die C_S als Randkurve hat.

Anmerkungen

- a) In der Herleitung des Stokes'schen Satzes spielt es keine Rolle, welche Fläche S von C_S umrandet wird. Flächen können deformiert (vereinfacht) werden, solange sie als eine Funktion $z = z(x, y)$ darstellbar sind und ihre Randkurve dabei nicht verändert wird. (Beispiel siehe unten.)

- b) Es ist

$$\oiint_S \text{rot } \vec{\phi} d\vec{f} = 0,$$

da *geschlossene* Flächen keine Randkurven haben.

¹In der Literatur wird der Pfeil über dem Symbol ∇ meist weggelassen.

²In der englischsprachigen Literatur finden wir oft anstelle von $\text{rot } \vec{\phi}$ die Bezeichnung $\text{curl } \vec{\phi}$.

6.4 Zur Bedeutung der Rotation

Wir beginnen damit, die zweidimensionalen Beispiele noch einmal zu betrachten. Die Kurve C ist jeweils die gleiche wie zuvor. Für alle diese Fälle ist $d\vec{f} = \vec{k} \cdot dx \, dy$.

Beispiel 1: Die lineare Strömung $\vec{v} = \alpha y \cdot \vec{i}$, ($\alpha > 0$)

- Zirkulation

$$\oint_C \vec{v} \, d\vec{r} = -\alpha A_G$$

- Rotation

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha y & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha \vec{k}, \quad d\vec{f} = \vec{k} \, dx \, dy$$

Somit ist übereinstimmend

$$\iint_S \text{rot } \vec{v} \, d\vec{f} = -\alpha \iint_G dx \, dy = -\alpha A_G.$$

Beispiel 2: Die radiale Strömung $\vec{v} = \alpha \vec{r} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j})$

- Zirkulation

$$\oint_C \vec{v} \, d\vec{r} = 0$$

- Rotation

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha x & \alpha y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

das Strömungsfeld ist wirbelfrei.

Somit ist übereinstimmend

$$\iint_S \text{rot } \vec{v} \, d\vec{f} = 0.$$

Beispiel 3: Die starre Rotation $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$ mit $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

- Zirkulation

$$\oint_C \vec{v} \, d\vec{r} = 2\pi\omega R^2 = 2\omega \cdot A_G$$

- Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}, \quad d\vec{f} = \vec{k} \, dx \, dy$$

Somit ist übereinstimmend

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \, d\vec{f} = 2\omega \iint_G dx \, dy = 2\omega A_G.$$

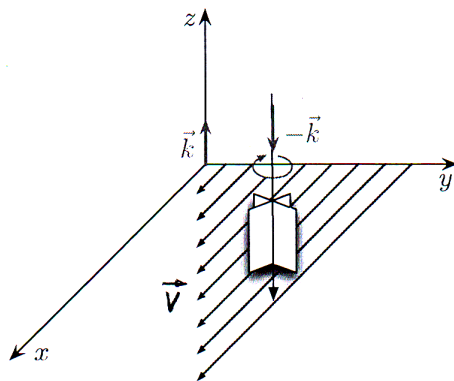
Anmerkungen:

- Die Rotation eines Vektorfeldes ist ein *Vektor*, der das Vektorfeld lokal charakterisiert. Hingegen ist die Zirkulation eine *Zahl* (ein Integral), die das Vektorfeld global charakterisiert.
- Allgemein ist $\operatorname{rot} \vec{r} = \vec{0}$, auch in drei Dimensionen.
- In allen diesen Beispielen erfolgt die Strömung in der (x, y) -Ebene, die den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{k}$ hat. Und in allen diesen Beispielen hat der Vektor $\operatorname{rot} \vec{v}$ nur eine konstante Komponente in Richtung $\vec{k}$. Es ist jeweils

$$\vec{k} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{A_G} \oint_C \vec{v} \, d\vec{r}.$$

Wir können daher sagen, daß $\vec{k} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$ auch die Normalkomponente des Vektors $\operatorname{rot} \vec{v}$ ist und den Zusammenhang zwischen Zirkulation und Rotation so formulieren: *Die Normalkomponente der Rotation ist die Zirkulation pro Fläche.* Dieser Satz bleibt für eine kleine geschlossene Kurve C , die eine ebene Fläche mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ anstelle von $\vec{k}$ umschließt, auch dann richtig, wenn der Vektor $\operatorname{rot} \vec{v}$ nicht eine so besonders einfache Gestalt hat wie in diesen Beispielen.

- Zur anschaulichen Bedeutung der Rotation eines Vektorfeldes:



Es ist $\vec{k} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$ maximal, falls $\operatorname{rot} \vec{v} \parallel \vec{k}$ ist. Damit können wir der Rotation eine anschauliche Bedeutung geben:

Der Vektor $\operatorname{rot} \vec{v}$ zeigt die Richtung an, in die wir ein Schaufelrad halten müssen, damit es sich, von der Spitze seiner Achse gesehen, entgegen dem Uhrzeigersinn am schnellsten dreht.

Zu Beispiel 1: $\operatorname{rot} \vec{v} = -a\vec{k} \quad (a > 0)$

6.5 Beispiele für den Stokesschen Satz

Beispiel 1: Das Vektorfeld $\vec{\phi}$ sei ein dreikomponentiges Kraftfeld $\vec{F}$.

Ist $\text{rot } \vec{F} = 0$, folgt aus dem Stokesschen Satz direkt

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = 0$$

und somit, daß das Kraftfeld $\vec{F}$ konservativ ist. Wir wissen bereits, daß sich $\vec{F}$ dann als Gradient eines skalaren Potentials U darstellen läßt, $\vec{F} = -\text{grad } U$. Wir haben also

$$\text{rot grad } U \equiv \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

und nach expliziter Darstellung der symbolischen Determinante

$$\begin{aligned} \text{rot grad } U &= \vec{i} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right)}_{=0} - \vec{j} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)}_{=0} + \vec{k} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)}_{=0} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Beispiel 2:

Das Vektorfeld sei durch

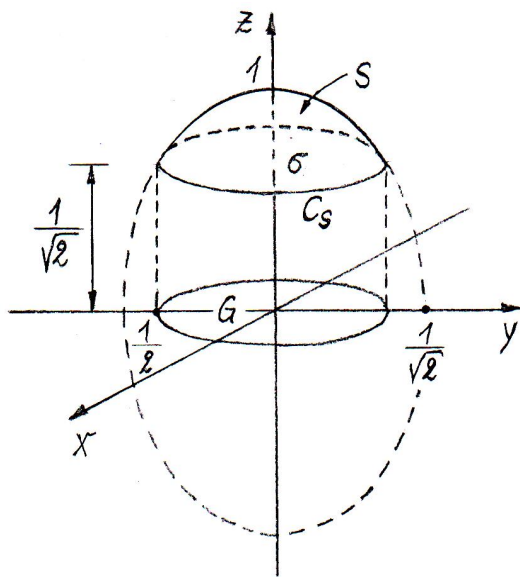
$$\vec{\phi} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k} = \vec{r} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

gegeben, sodaß

$$\text{rot } \vec{\phi} = -2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

ist.

Die Fläche S sei die Kappe eines Rotationsellipsoids, die wie folgt beschrieben wird.



S : Rotationsellipsoid $2(x^2 + y^2) + z^2 = 1$

C_S : Kreis in Höhe $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ parallel zur (x, y) -Ebene,

$$2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \quad (\text{Radius } \frac{1}{2}),$$

parametrisiert durch (Polarkoordinaten)

$$x = \frac{1}{2} \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

Damit wird für C_S

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{k}$$

und

$$d\vec{r} = \frac{1}{2} (-\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}) d\varphi.$$

- Zirkulation (Kurvenintegral)

$$\begin{aligned} \oint_{C_S} \vec{\phi} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cos \varphi \right) \cos \varphi \right] d\varphi \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} d\varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi}_{=0} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- Oberflächenintegral

Mit $z = \sqrt{1 - 2(x^2 + y^2)}$ wird

$$d\vec{f} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) dx dy = \left(\frac{2x}{z} \vec{i} + \frac{2y}{z} \vec{j} + \vec{k} \right) dx dy$$

und

$$\text{rot } \vec{\phi} d\vec{f} = -2 \frac{2x + 2y + z}{z} dx dy.$$

Damit folgt bei Verwendung von Polarkoordinaten auf G übereinstimmend

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} \vec{\phi} \, d\vec{f} &= -2 \iint_G \left[\frac{2(x+y)}{\sqrt{1-2(x^2+y^2)}} + 1 \right] dx \, dy \\
 &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{2r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{\sqrt{1-2r^2}} + 1 \right] \\
 &= -4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^2 \, dr}{\sqrt{1-2r^2}} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi}_{=0} \right] - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} r \, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= -2 \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Eine vorherige Deformation der Fläche S zur Fläche σ mit *gleicher Randkurve* C_S hätte schneller zum Ergebnis geführt. Mit

$$\sigma: \quad x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad d\vec{f} = \vec{k} \cdot dx \, dy$$

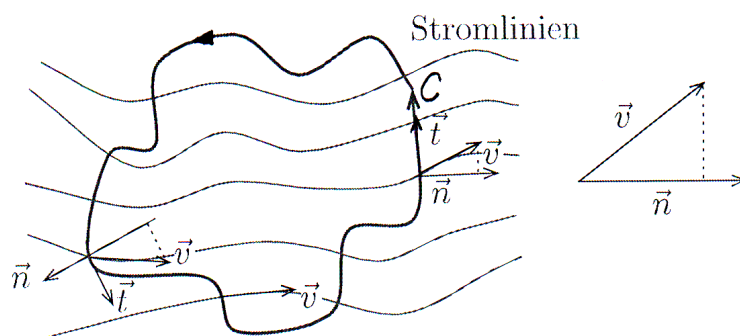
erhalten wir

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{\phi} \, d\vec{f} = -2 \iint_G dx \, dy = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

7 Der Gaußsche Satz, Fluß und Divergenz

7.1 Der Fluß eines Vektorfeldes und der Gaußsche Satz für die Ebene

Wie bei der Herleitung des Stokesschen Satzes betrachten wir zuerst das Strömungsfeld einer Flüssigkeit in der Ebene. Eine Kurve C wird von diesem Strömungsfeld durchflossen. Beide liegen in der gleichen Ebene. Die Strömungsgeschwindigkeit ist $\vec{v}$.



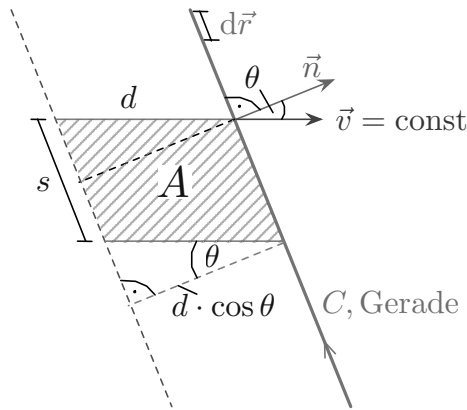
Wie wir bereits wissen, beschreibt der Ausdruck

$$\oint_C \vec{v} \, d\vec{r} = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{t}) \, ds \quad \text{mit} \quad ds = |d\vec{r}|$$

die Aufsummierung der *Tangentialkomponenten* $(\vec{v} \cdot \vec{t})$ von $\vec{v}$ entlang der Kurve C . Diese Summe haben wir als *Zirkulation (Umströmung)* von $\vec{v}$ in Bezug auf diese Kurve bezeichnet.

Die Frage ist nun, welche Bedeutung der Summe der *Normalkomponenten* $(\vec{v} \cdot \vec{n})$ von $\vec{v}$ zukommt.

Vorbereitendes Beispiel Eine Gerade C werde auf einem bestimmten Abschnitt der Länge s mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durchströmt.



Es bedeuten

- $\vec{v}$: Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit
- $A = s \cdot d \cdot \cos \theta$: Maß für die Flüssigkeitsmenge
- $\tau = \frac{d}{v} = \frac{A}{s \cdot v \cdot \cos \theta}$: Durchflußzeit

Wir bezeichnen die Flüssigkeitsmenge

$$\frac{A}{\tau} = s \cdot v \cdot \cos \theta = s \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}),$$

die in der Zeit τ durch ein gerades Segment der Länge s von C tritt, als Fluß.

Verallgemeinerung Der *Fluß* eines Vektorfeldes $\vec{v}$ durch eine Kurve C ist das Integral

$$\int_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds.$$

Es ist ein Maß für die *Durchströmung* der Kurve C . Dieser Begriff „Fluß“ ist nicht an geschlossene Kurven oder Flächen gebunden. Es entspricht unserer Anschauung, daß es für $\vec{v} \perp \vec{n}$ keinen Fluß durch C gibt.

Fluß durch eine geschlossene Kurve Wir betrachten nun den Fluß durch eine *geschlossene* Kurve C , die ein Gebiet G umrandet, in der Absicht, auf den Greenschen Satz zurückgreifen zu können.

Das Vektorfeld $\vec{v}$ habe die Komponenten $P(x, y)$ und $Q(x, y)$,

$$\vec{v} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j}.$$

Somit ist der Fluß durch eine geschlossene Kurve C

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \vec{n} \, ds.$$

Wenn wir die Kurve C durch t parametrisieren, ist das Bogenlängen-Element ds durch

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

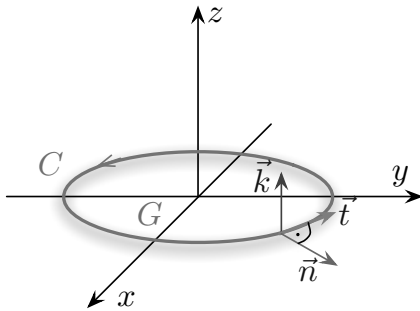
gegeben. Wir betonen noch einmal, daß $\frac{ds}{dt}$ *nicht* die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit ist.

Um den Fluß zu berechnen, suchen wir nun nach einem Ausdruck für den *nach außen* gerichteten Normalenvektor. Es ist

$$\vec{n} = \vec{t} \times \vec{k}.$$

Der Tangenten-Einheitsvektor $\vec{t}$ ergibt sich aus

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{t} \quad \text{zu} \quad \vec{t} = \frac{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$



$$\vec{n} = \vec{t} \times \vec{k}$$

Der Normalen-Einheitsvektor $\vec{n}$ wird damit

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} [\dot{x} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + \dot{y} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})]$$

$$\vec{n} = \frac{\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

(Offensichtlich ist $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0 = \vec{n} \cdot \vec{k}$.)

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Fluß nun in der Form

$$\begin{aligned} \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds &= \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \frac{\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \left(\frac{dy}{dt} \vec{i} - \frac{dx}{dt} \vec{j} \right) dt \\ &= \oint_C (P dy - Q dx) \end{aligned}$$

schreiben. Wenden wir nun auf dieses Zwischenergebnis den Greenschen Satz mit den Ersetzungen $P \rightarrow -Q$ und $Q \rightarrow P$ an, wobei G das von der Kurve C eingeschlossene, in der (x, y) -Ebene liegende Gebiet ist, erhalten wir abschließend den Gaußschen Satz

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \oint_C (P dy - Q dx) = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

für die Ebene.

(Zum Vergleich: Es war mit dem Tangentenvektor $\vec{t}$ das entsprechende Resultat, der Stokes'sche Satz für die Ebene, $\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{t}) ds = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.)

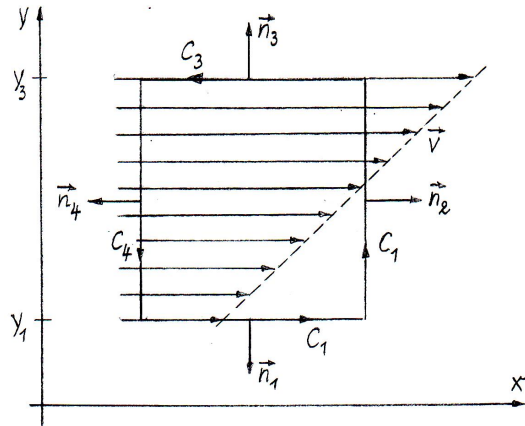
7.2 Beispiele für ebene Strömungen

Im Folgenden verifizieren wir den Gaußschen Satz für die drei bereits bekannten Beispiele ebener Strömungen.

Beispiel 1: Die lineare Strömung $\vec{v} = \alpha y \cdot \vec{i}$ mit $\alpha > 0$, sodaß $P = \alpha y$ und $Q = 0$ ist.

- Fluß (Linienintegral)

	$\vec{n}$	$\vec{v} \cdot \vec{n}$	ds
C_1	$-\vec{j}$	0	dx
C_2	$\vec{i}$	αy	dy
C_3	$\vec{j}$	0	$-dx$
C_4	$-\vec{i}$	$-\alpha y$	$-dy$



Wir erhalten also für den Fluß

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = \int_{y_1}^{y_3} \alpha y \, dy + \int_{y_3}^{y_1} (-\alpha y)(-dy) = 0.$$

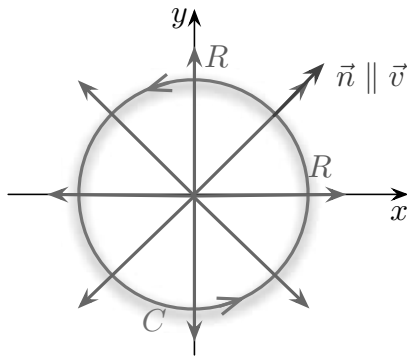
- Flächenintegral

Es ist $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Damit ergibt sich eine Übereinstimmung, denn es ist

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \, dy = 0.$$

Resultat: Der Netto-Fluß dieses Vektorfeldes durch diese geschlossene (orientierte!) Kurve ist Null. Es strömt so viel Flüssigkeit aus dem Gebiet G aus, wie eingeflossen ist. Man sagt: Die Flüssigkeit ist inkompressibel.

Beispiel 2: Die radiale Strömung $\vec{v} = \alpha \vec{r} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j})$ mit $P = \alpha x$ und $Q = \alpha y$



- Fluß (Linienintegral)

Es gilt überall auf C , daß $\vec{v} \parallel \vec{n}$, also $\cos(\vec{v}, \vec{n}) = 1$ ist und damit

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v \cos(\vec{v}, \vec{n}) = v = \alpha r.$$

Wir erhalten in Polarkoordinaten, da $r = R$ auf C gilt,

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = \int_0^{2\pi} \alpha R \cdot R \, d\varphi = 2\pi \alpha R^2.$$

- Flächenintegral

Es ist $\frac{\partial P}{\partial x} = \alpha$ und $\frac{\partial Q}{\partial y} = \alpha$ und damit

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \, dy = 2\alpha \iint_G dx \, dy = 2\alpha \cdot \pi R^2.$$

(Das Integral $\iint_G dx \, dy$ ist der Flächeninhalt des von C umschlossenen Kreises.)

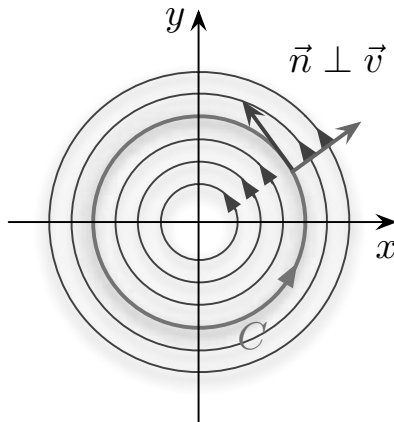
Wir stellen Übereinstimmung fest.

Resultat:

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = 2\pi \alpha R^2 \begin{cases} > 0 & \text{für } \alpha > 0, \text{ Strömung expandiert (divergiert)} \\ < 0 & \text{für } \alpha < 0, \text{ Strömung kontrahiert (konvergiert)} \end{cases}$$

Der Fluß ist positiv, wenn die Flüssigkeit den Kreis von innen nach außen durchströmt, aber negativ, wenn sie in das von dem Kreis umschlossene Gebiet einströmt.

Beispiel 3: Die starre Rotation $\vec{v} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$ mit $P = -\omega y$ und $Q = \omega x$



- Fluß (Linienintegral)

Es gilt überall auf C , daß $\vec{v} \perp \vec{n}$, also $\cos(\vec{v}, \vec{n}) = 0$ ist und damit

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v \cos(\vec{v}, \vec{n}) = 0.$$

Wir erhalten also

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = 0.$$

- Flächenintegral

Es ist $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$, und damit wird übereinstimmend

$$\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dx \, dy = 0.$$

Die Kurve C wird umströmt, aber nicht durchströmt.

7.3 Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes auf drei Dimensionen

Bisher haben wir uns auf ein zweidimensionales Vektorfeld beschränkt. Anschaulich war dieses Vektorfeld die Geschwindigkeit $\vec{v}$ einer strömenden Flüssigkeit in der Ebene. Etwas allgemeiner soll nun ein Vektorfeld

$$\vec{\phi} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

im dreidimensionalen Raum betrachtet werden. Darin ist $P = P(x, y, z)$, ebenso Q und R .

Unsere Aufgabe besteht darin, anstelle des Flusses durch eine (nicht notwendig geschlossene) Linie C den Fluß durch eine Fläche S mit dem Flächenelement $d\vec{f} = \vec{n} \cdot df$ zu berechnen,

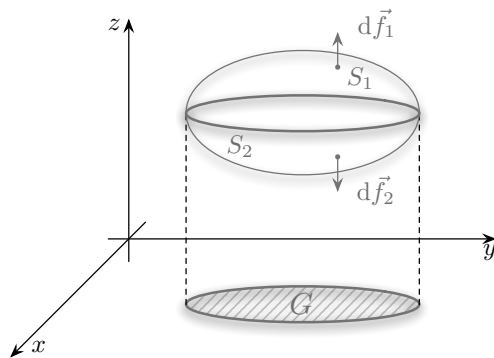
$$\int_C (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) \, ds \longrightarrow \iint_S (\vec{\phi} \cdot \vec{n}) \, df = \iint_S \vec{\phi} \, d\vec{f}.$$

Der Fluß durch eine *geschlossene* Fläche S , die ein Volumen V umgibt, ist durch

$$\oiint_S \vec{\phi} \, d\vec{f} = \oiint_S P \cdot \vec{i} \, d\vec{f} + \oiint_S Q \cdot \vec{j} \, d\vec{f} + \oiint_S R \cdot \vec{k} \, d\vec{f}$$

gegeben. Wir behandeln nun exemplarisch den 3. Summanden, die beiden anderen ergeben sich dann in analoger Weise.

Die Fläche S zerlegen wir in zwei Teilflächen S_1 und S_2 , deren jede durch eine Funktion $z_1(x, y)$ beziehungsweise $z_2(x, y)$ beschreibbar sein soll. Die Wertepaare (x, y) sind dabei dem Grundgebiet G zu entnehmen.



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 : z = z_1(x, y), \quad S_2 : z = z_2(x, y)$$

Damit folgt

$$\oiint_S R \cdot \vec{k} \, d\vec{f} = \iint_G \{R[x, y, z_1(x, y)] - R[x, y, z_2(x, y)]\} \, dx \, dy.$$

Andererseits ist das Volumenintegral

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_G \left[\int_{z_2(x, y)}^{z_1(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right] \, dx \, dy \\ &= \iint_G R(x, y, z) \Big|_{z=z_2(x, y)}^{z=z_1(x, y)} \, dx \, dy \\ &= \iint_G \{R[x, y, z_1(x, y)] - R[x, y, z_2(x, y)]\} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Der Vergleich ergibt

$$\oiint_S R \cdot \vec{k} \, d\vec{f} = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz.$$

Danach ist der dritte Summand

$$\oiint_S R \cdot \vec{k} \, d\vec{f} = \iint_{S_1} R \cdot \vec{k} \, d\vec{f}_1 + \iint_{S_2} R \cdot \vec{k} \, d\vec{f}_2$$

mit

$$d\vec{f}_1 = \left(-\frac{\partial z_1}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial z_1}{\partial y} \vec{j} + \vec{k} \right) \, dx \, dy,$$

sodaß $\vec{k} \, d\vec{f}_1 = dx \, dy$ ist und mit

$$d\vec{f}_2 = \left(\frac{\partial z_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z_2}{\partial y} \vec{j} - \vec{k} \right) \, dx \, dy,$$

sodaß $\vec{k} \, d\vec{f}_2 = -dx \, dy$ ist.

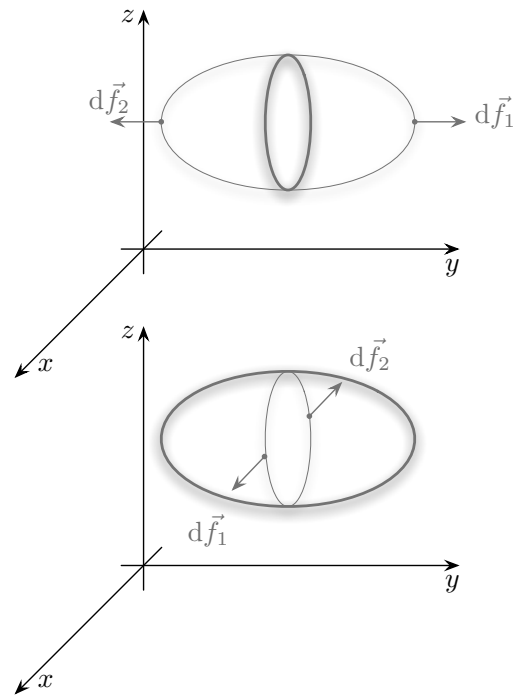
Dabei ist zu beachten, daß $d\vec{f}_1$ und $d\vec{f}_2$ jeweils die Richtung der *äußeren* Normalen haben.

In gleicher Weise erhalten wir für die beiden anderen Komponenten des Vektors $\vec{\phi}$

$$\oiint_S Q \cdot \vec{j} \, d\vec{f} = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz$$

$$\oiint_S P \cdot \vec{i} \, d\vec{f} = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz,$$

wobei die Abbildung die Zerlegung der Fläche S für die Berechnung des zweiten (oben) und des ersten (unten) Summanden zeigt.



Alle drei Teilresultate zusammen ergeben den Fluß

$$\oiint_S \vec{\phi} \, d\vec{f} = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz$$

des Vektorfeldes $\vec{\phi}$ durch die geschlossene Fläche S . Darin ist der Integrand des Volumenintegrals die *Divergenz* des Vektorfeldes $\vec{\phi}$,

$$\operatorname{div} \vec{\phi} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Mit diesem Begriff kann der *Gaußsche Satz* in der kompakten Form

$$\oiint_S \vec{\phi} \, d\vec{f} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{\phi} \, dV$$

aufgeschrieben werden. In Worten: Der Fluß eines Vektorfeldes $\vec{\phi}$ durch eine geschlossene Fläche S , die ein Volumen V umschließt, ist gleich dem Volumenintegral der Divergenz von $\vec{\phi}$.

Zur Bedeutung der Divergenz Die Divergenz ist nach Definition ein Differentialoperator, der, angewandt auf einen Vektor, einen *Skalar* ergibt. Wir betrachten die zweidimensionalen Beispiele noch einmal, um so die Bedeutung der Divergenz zu erkennen.

Beispiel 1: Die lineare Strömung $\vec{v} = \alpha y \cdot \vec{i}$ mit $\alpha > 0$

- Fluß

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = 0$$

- Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Die Strömung ist inkompressibel. Wir stellen Übereinstimmung fest.

Beispiel 2: Die radiale Strömung $\vec{v} = \alpha \vec{r} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j})$

- Fluß

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = 2\alpha \cdot \pi R^2$$

- Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = 2\alpha \begin{cases} > 0, & \text{wenn die Strömung expandiert (Quelle)} \\ < 0, & \text{wenn die Strömung kontrahiert (Senke)} \end{cases}$$

Das rechtfertigt die Bezeichnung *Quellstärke* für die Divergenz $\operatorname{div} \vec{v}$. Zusammen mit dem Stokesschen Satz zeigt sich also, daß eine radiale Strömung ein *wirbelfreies Quellenfeld* ist.

Beispiel 3: Die starre Rotation $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j})$

- Fluß

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = 0$$

- Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Es liegt weder eine Quelle noch eine Senke vor. Zusammen mit dem Stokesschen Satz zeigt sich hier, daß die starr rotierende Strömung ein *quellenfreies Wirbelfeld* ist.

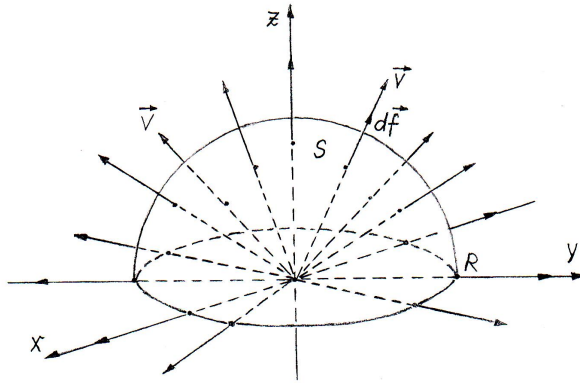
7.4 Beispiele für den Gaußschen Satz

Beispiel 1: Verallgemeinerung der radialen Strömung auf drei Dimensionen

- Strömungsfeld: $\vec{v} = \alpha \vec{r} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

a) Fluß durch die *offene* Fläche einer Halbkugel

- Fläche S : Obere Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z > 0$



- Fluß

Für die Kugeloberfläche ist das Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{f} = \vec{e}_r \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Mit $\vec{v} = \alpha r \cdot \vec{e}_r$ wird

$$\vec{v} \cdot d\vec{f} = \alpha r^3 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Auf der Oberfläche S ist $r = R$. Damit erhalten wir für den Fluß

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \, d\vec{f} &= \alpha R^3 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \alpha R^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3\alpha. \end{aligned}$$

b) Verifikation des Gaußschen Satzes bei Fluß durch eine Vollkugel.

Die Fläche $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ist geschlossen.

- Fluß

$$\oiint_S \vec{v} \, d\vec{f} = 2 \cdot 2\pi \alpha R^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3\alpha$$

- Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = 3\alpha$$

Damit wird das Volumenintegral mit übereinstimmendem Ergebnis

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV = 3\alpha \iiint_V dV = 3\alpha \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi \alpha R^3.$$

Anmerkungen:

a) In diesem Beispiel ist $\operatorname{div} \vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}$ und

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{V} \oiint_S \vec{v} \, d\vec{f}.$$

Das bleibt auch im allgemeinen Fall richtig, wenn kleine Volumina um lokale Punkte P betrachtet werden.

Die Dimension „Fluß pro Volumen“ legt für $\operatorname{div} \vec{v}$ auch die Bezeichnung *Flußdichte* nahe.

b) In drei Dimensionen ist $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.

Beispiel 2: Verifikation des Gaußschen Satzes bei einem Fluß durch einen Zylinder

- Vektorfeld $\vec{\phi}$:

$$\vec{\phi} = 3xy^2 \cdot \vec{i} + 3x^2y \cdot \vec{j} + z^3 \cdot \vec{k}$$

$$\operatorname{div} \vec{\phi} = 3y^2 + 3x^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2) + 3z^2$$

- Volumen V : Kreiszylinder mit

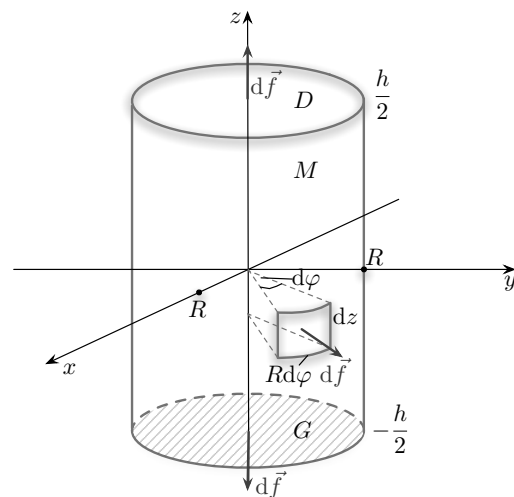
$$x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ und } -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

- Fläche S :

$$G: x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = -\frac{h}{2}$$

$$D: x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = \frac{h}{2}$$

$$M: x^2 + y^2 = R^2, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$



D: Deck-, G: Grund-, M: Mantelfläche

- Fluß (Oberflächenintegral)

$$\oiint_S \vec{\phi} \, d\vec{f} = \iint_G \vec{\phi} \, d\vec{f} + \iint_D \vec{\phi} \, d\vec{f} + \iint_M \vec{\phi} \, d\vec{f}$$

Grundfläche G :

$$\left. \begin{aligned} d\vec{f} &= -\vec{k} \cdot dx \, dy \\ z &= -\frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \quad \vec{\phi} \, d\vec{f} = -z^3 \, dx \, dy = \frac{1}{8} h^3 \, dx \, dy$$

Deckfläche D :

$$\left. \begin{aligned} d\vec{f} &= \vec{k} \cdot dx \, dy \\ z &= \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \quad \vec{\phi} \, d\vec{f} = z^3 \, dx \, dy = \frac{1}{8} h^3 \, dx \, dy$$

Mantelfläche M : Mit $x = R \cos \varphi$ und $y = R \sin \varphi$ wird

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= (\cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}) \cdot R \, d\varphi \, dz \\ \vec{\phi} \, d\vec{f} &= 3(x y^2 \cos \varphi + x^2 y \sin \varphi) R \, d\varphi \, dz \\ &= 3R^4 (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) \, d\varphi \, dz \\ &= 6R^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dz. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den Fluß

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{\phi} \, d\vec{f} &= \frac{1}{8} h^3 \cdot \iint_G dx \, dy + 6R^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + \frac{1}{8} h^3 \cdot \iint_D dx \, dy \\ &= \frac{1}{8} h^3 \pi R^2 + 6R^4 \cdot \frac{2\pi}{8} \cdot h + \frac{1}{8} h^3 \pi R^2 \\ &= \frac{\pi}{2} R^2 h \left(\frac{1}{2} h^2 + 3R^2 \right). \end{aligned}$$

- Divergenz und Volumenintegral

Mit $x^2 + y^2 = \varrho^2$ wird in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{\phi} = 3(\varrho^2 + z^2)$$

und

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{\phi} \, dV &= 3 \int_0^R \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz (\varrho^2 + z^2) \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot h \int_0^R \varrho^3 \, d\varrho + 3 \cdot 2\pi \int_0^R \varrho \, d\varrho \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, dz \\ &= \frac{\pi}{2} R^2 h \left(3R^2 + \frac{1}{2} h^2 \right). \end{aligned}$$

Wir stellen Übereinstimmung fest.

Beispiel 3: Es sei $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{\phi}$.

Wenden wir auf dieses Vektorfeld $\vec{a}$ nacheinander den Gaußschen und den Stokesschen Satz an, resultiert

$$\iiint_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\phi} \, dV = \iiint_V \operatorname{rot} \vec{\phi} \, d\vec{f} = \oint_{C_S} \vec{\phi} \, d\vec{r} = 0,$$

denn eine geschlossene Fläche S hat keine Randkurve C_S .

Resultat:

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\phi} \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\phi}) \equiv 0}$$

Expliziter Nachweis:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\phi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0$$

Beispiel 4: Der Laplace-Operator und die Greenschen Identitäten

Es sei $\vec{\phi} = \lambda \vec{A}$ mit $\lambda = \lambda(\vec{r})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\phi} &= \operatorname{div}(\lambda \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda A_z) \\ &= \lambda \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} A_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} A_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} A_z \right), \end{aligned}$$

es gilt also die „Produktregel“

$$\boxed{\operatorname{div}(\lambda \vec{A}) = \lambda \cdot \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \lambda.}$$

Der Vektor $\vec{A}$ soll nun als Gradient einer skalaren Funktion U darstellbar sein, $\vec{A} = \text{grad } U$. Dann wird aus der Produktregel

$$\text{div}(\lambda \text{grad } U) = \lambda \cdot \text{div}(\text{grad } U) + \text{grad } U \cdot \text{grad } \lambda$$

Darin ist

$$\begin{aligned} \text{div grad } U &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \equiv \Delta U, \end{aligned}$$

was auch als

$$\begin{aligned} \text{div grad } U &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Der Operator

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

heißt *Laplace-Operator*.

Wenden wir auf ein Vektorfeld $\vec{\phi} = \lambda \text{grad } U$ den Gaußschen Satz an, folgt die *1. Greensche Identität*

$$\oint_S \lambda \text{grad } U \, d\vec{f} = \iiint_V (\lambda \Delta U + \text{grad } U \cdot \text{grad } \lambda) \, dV.$$

Nach Vertauschung von λ und U und Subtraktion resultiert die *2. Greensche Identität*

$$\oint_S (U \text{grad } \lambda - \lambda \text{grad } U) \, d\vec{f} = \iiint_V (U \Delta \lambda - \lambda \Delta U) \, dV.$$

8 Differentialoperatoren in krummlinigen Orthogonalkoordinaten

Wir haben bisher krummlinige Koordinaten hauptsächlich dazu benutzt, Linien-, Flächen- und Volumenelemente sowie die kartesischen Vektorkomponenten durch sie auszudrücken. Nun behandeln wir Eigenschaften von Vektoren, insbesondere auch Vektor-Differentialoperatoren, wenn diese nach den Basis-Einheitsvektoren der krummlinigen Koordinaten zerlegt werden. Wir erläutern die Grundideen am Beispiel der ebenen Polarkoordinaten und fassen, um Rechenaufwand zu vermeiden, die Resultate für Zylinder- und Kugelkoordinaten in einer abschließenden Übersicht zusammen.

8.1 Vektorkomponenten

Beispiel: Polarkoordinaten

Die ebenen Polarkoordinaten haben wir durch ihren Zusammenhang

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

mit den kartesischen Koordinaten und dessen Umkehrung

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

charakterisier. Die Basis-Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}$$

mit den Umkehr-Formeln

$$\vec{i} = \cos \varphi \cdot \vec{e}_r - \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi, \quad \vec{j} = \sin \varphi \cdot \vec{e}_r + \cos \varphi \cdot \vec{e}_\varphi.$$

Da ein Vektor $\vec{A}$ ein eigenständiges, nicht an ein bestimmtes Koordinatensystem gebundenes geometrisches Objekt ist, können wir ihn sowohl in seine kartesischen als auch in seine Polarkomponenten zerlegen,

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Die „Auflösung“ nach bestimmten Komponenten geschieht durch Multiplikation mit den Einheitsvektoren und Ausnutzung von deren Orthogonalität,

$$\begin{aligned} A_r &= \vec{A} \cdot \vec{e}_r = A_x \cdot (\vec{i} \cdot \vec{e}_r) + A_y \cdot (\vec{j} \cdot \vec{e}_r) = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ A_\varphi &= \vec{A} \cdot \vec{e}_\varphi = A_x \cdot (\vec{i} \cdot \vec{e}_\varphi) + A_y \cdot (\vec{j} \cdot \vec{e}_\varphi) = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} A_x &= \vec{A} \cdot \vec{i} = A_r \cdot (\vec{e}_r \cdot \vec{i}) + A_\varphi \cdot (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{i}) = A_r \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \\ A_y &= \vec{A} \cdot \vec{j} = A_r \cdot (\vec{e}_r \cdot \vec{j}) + A_\varphi \cdot (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{j}) = A_r \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Durch Vergleich stellen wir fest, daß sich beim Übergang von den kartesischen Koordinaten zu den Polarkoordinaten und umgekehrt die Vektorkomponenten wie die Basis-Einheitsvektoren transformieren.

8.2 Beispiele

Beispiel 1: $\vec{A} = \text{grad } U$

Mit $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi$ (und den entsprechenden Ableitungen nach y) wird

$$\begin{aligned} (\text{grad } U)_r &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \sin \varphi \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \sin \varphi \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \cos \varphi \right) \sin \varphi \\ &= \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir $(\text{grad } U)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$.

Beide Resultate zusammen ergeben

$$\boxed{\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi}.$$

Wir stellen fest, daß die Komponenten des Gradienten nicht generell die Ableitungen nach den Variablen des jeweiligen Koordinatensystems sind. Hier tritt bei der φ -Komponente der Faktor $\frac{1}{r}$ hinzu. Schon aus Dimensionsgründen muß hier eine reziproke Länge stehen, da der Gradient die Dimension einer reziproken Länge hat, der Winkel φ aber dimensionslos ist.

Beispiel 2: $\text{div } \vec{A}$

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

und nach Einsetzen von A_x und A_y , ausgedrückt durch A_r und A_φ ,

$$\boxed{\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}}.$$

Warnung: An dieser Stelle ist eine Warnung betreffend die Benutzung des Nabla-Operators in krummlinigen Koordinaten angebracht.

Wir definieren den Nabla-Operator gemäß

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

sodaß $\vec{\nabla} U = \text{grad } U$ ist. Dabei haben wir bewußt die Basisvektoren vor die Ableitungen gestellt, da sie im allgemeinen selbst von den Variablen abhängig sind und die Ableitungen stets auf alle rechts von ihnen stehenden Größen wirken.

Wir berechnen mit Orthogonalitätsrelationen für die Basis-Einheitsvektoren das symbolische Skalarprodukt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi).$$

Nun könnten wir der Versuchung erliegen, zuerst das Skalarprodukt der Basis-Einheitsvektoren zu berechnen, um

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

zu erhalten. Das ist *falsch*! Im Resultat fehlt der Summand $\frac{1}{r} A_r$. Durch die Wirkung des Nabla-Operators nach rechts sind auch die Ableitungen auf $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$, also $\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$ und $\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_r$ zu berücksichtigen. Richtig ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (A_r \vec{e}_r) + \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (A_\varphi \vec{e}_\varphi) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_r \vec{e}_r) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\varphi \vec{e}_\varphi) \\ &= \vec{e}_r^2 \frac{\partial A_r}{\partial r} + \cancel{\vec{e}_r \vec{e}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}} + \cancel{\vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \vec{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} A_r \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \cancel{\vec{e}_\varphi \frac{1}{r} A_\varphi \vec{e}_r} \\ &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} A_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Dabei verschwinden die durchgestrichenen Terme einzeln aufgrund der Orthogonalität der Basis-Einheitsvektoren.

Beispiel 3: ΔU

Mit den Ergebnissen der Beispiele 1 und 2 wird der Laplace-Operator in Polarkoordinaten

$$\Delta U = \text{div grad } U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

8.3 Zusammenfassung und Formelsammlung

Weitere Ergebnisse, insbesondere für die Rotation eines Vektorfeldes in Polarkoordinaten und alle entsprechenden Resultate für die Zylinder- und Kugelkoordinaten stellen wir in einer Zusammenfassung tabellarisch zusammen. Die Ausdrücke für ebene Polarkoordinaten ergeben sich aus denen für Zylinderkoordinaten, wenn die z-Koordinate ignoriert wird.

- Linienelement:

$$ds^2 = g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2 + g_3^2 dx_3^2$$

Jeder der metrischen Koeffizienten g_1 , g_2 und g_3 kann im allgemeinen von jeder der Variablen x_1 , x_2 und x_3 abhängen.

Beispiele: Kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten

	x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3
kartesisch	x	y	z	1	1	1
Zylinder	ϱ	φ	z	1	ϱ	1
Kugel	r	ϑ	φ	1	r	$r \sin \vartheta$

Der Leser ist aufgerufen, alle nachfolgenden Formeln für Zylinder- und Kugelkoordinaten zu explizieren.

- Volumenelement:

$$dV = g_1 g_2 g_3 \cdot dx_1 dx_2 dx_3$$

- Basis-Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{g_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{g_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{g_3} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_3}$$

- Gradient:

$$\text{grad } U = \frac{1}{g_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \cdot \vec{e}_3$$

- Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \cdot \frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \cdot \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Die Basis-Einheitsvektoren stehen links von den Differentialoperatoren.

- Divergenz:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g_1 A_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (g_1 g_2 A_3) \right]$$

- Rotation:

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \cdot \begin{vmatrix} g_1 \vec{e}_1 & g_2 \vec{e}_2 & g_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ g_1 A_1 & g_2 A_2 & g_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Die symbolische Determinante wird nach ihrer ersten Zeile entwickelt.

Beispiel: In Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\vartheta) \right] \\ &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

- Laplace-Operator: $\Delta U = \text{div grad } U$

$$\Delta U = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_1 g_3}{g_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \right]$$

8.4 Zusätzlicher Inhalt: Beziehungen zwischen Vektor-Differentialoperatoren

Im Zusammenhang mit dem Stokesschen und dem Gaußschen Satz haben wir bereits die beiden Identitäten

$$\text{rot grad } U = \vec{0}$$

$$\text{div rot } \vec{A} = 0$$

kennengelernt und, zurückgehend auf die Definition der Differentialoperatoren, ihre Gültigkeit in kartesischen Koordinaten bewiesen. Da es sich um Vektor-Beziehungen handelt, gelten sie auch in den anderen Koordinatensystemen. Mit der anschaulichen Bedeutung der Operatoren grad, div und rot leuchten diese Beziehungen auch unmittelbar ein.

Eine weitere Relation ist

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

Wir haben bisher den Laplace-Operator durch $\Delta U = \text{div grad } U$, also durch Anwendung auf eine skalare Funktion U definiert. Die Anwendung des Gradienten auf einen Vektor ist nicht erklärt. Gleichwohl können wir den Laplace-Operator auf einen Vektor $\vec{A}$ wirken lassen,

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_1 g_3}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right] (A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3).$$

Dabei haben wir aber zu beachten, daß die Ableitungen im allgemeinen auch auf die Basis-Einheitsvektoren wirken, was zu zusätzlichen Beiträgen zu den Komponenten von $\Delta \vec{A}$ führt, sodaß $(\Delta \vec{A})_i$ nicht gleich ΔA_i ist ($i = 1, 2, 3$), es sei denn, daß der zugehörige Basisvektor eine konstante Richtung hat.

Beispiel: Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten finden wir

$$\begin{aligned}(\Delta \vec{A})_\varrho &= \Delta A_\varrho - \frac{1}{\varrho^2} \left(A_\varrho + 2 \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varrho} \right) \\(\Delta \vec{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{1}{\varrho^2} \left(A_\varphi - 2 \frac{\partial A_\varrho}{\partial \varphi} \right) \\(\Delta \vec{A})_z &= \Delta A_z.\end{aligned}$$

Hier ist $(\Delta \vec{A})_z = \Delta A_z$, da $\vec{e}_z \equiv \vec{k} = \overrightarrow{\text{const}}$ ist.

Desweiteren gelten – wieder koordinaten-unabhängig – die „Produktregeln“

$$\begin{aligned}\text{grad}(UV) &= U \cdot \text{grad } V + V \cdot \text{grad } U \\ \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{div}(\lambda \vec{A}) &= \lambda \cdot \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } \lambda \\ \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{rot}(\lambda \vec{A}) &= \lambda \cdot \text{rot } \vec{A} + (\text{grad } \lambda) \times \vec{A} \\ \text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B} + \vec{A} \cdot \text{div } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div } \vec{A}.\end{aligned}$$

9 Zusätzlicher Inhalt: Die Symbole von Kronecker und Levi-Civita

In diesem Abschnitt werden wir keine neuen Resultate herleiten, sondern vielmehr bekannte Ergebnisse der Vektoralgebra und -analysis im Indexkalkül formulieren. Wir arbeiten dabei in kartesischen Koordinaten, obwohl dieser Formalismus auch in krummlinigen Koordinaten funktioniert.

9.1 Skalarprodukt und Divergenz

Bisher haben wir Vektoren mit Hilfe der Basis-Einheitsvektoren durch ihre Komponenten in der Form

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

dargestellt. Nun führen wir die Bezeichnungen $a_x \equiv a_1$, $a_y \equiv a_2$, $a_z \equiv a_3$ sowie $\vec{i} \equiv \vec{e}_1$, $\vec{j} \equiv \vec{e}_2$, $\vec{k} \equiv \vec{e}_3$ ein. Damit können wir die Komponentendarstellung in der Form

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i$$

aufschreiben.

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist dann

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \cdot \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Dabei ist zu beachten, daß die Indizes unabhängig voneinander die Zahlen $1, \dots, 3$ durchlaufen. Sie müssen daher für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verschieden bezeichnet werden – wie etwa i und j und nicht etwa beide Male i .

Da die Basisvektoren orthogonal und normiert sind, gilt für deren Skalarprodukt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Wir definieren nun das *Kronecker-Symbol*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Mit dessen Hilfe ausgedrückt, enthält die *Orthonormalitätsrelation*

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

die vollständige Multiplikationstabelle für das Skalarprodukt. Somit kann das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nun als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

geschrieben werden. In der Summe über j ist wegen des Kronecker-Symbols nur der Summand von Null verschieden, für den $j = i$ ist.

Zur weiteren Vereinfachung der Symbolik treffen wir nun noch die *Einsteinsche Summenkonvention* genannte Vereinbarung, daß

- über doppelt auftretende Indizes summiert und
- das Summenzeichen weggelassen wird.

Damit wird das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Anmerkungen:

- Das Skalarprodukt ist eine Zahl; die Summationsindizes kommen im Ergebnis nicht vor; sie sind „stumm“ und dürfen umbenannt werden. Es ist demnach $a_i b_i = a_k b_k = a_m b_m = \dots$, solange $i, k, m, \dots$ gleiche Werte annehmen. (Zum Vergleich: Im bestimmten Integral kommt nach Einsetzen der Grenzen die Integrationsvariable auch nicht mehr vor.)

- Es ist

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3.$$

- Es ist außerdem

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z.$$

Beispiel: Potential und Feldstärke eines elektrischen Dipols

Das Dipolpotential ist durch

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{p} = \text{const}$$

gegeben. Wir berechnen die zugehörige Feldstärke $\vec{E} = -\text{grad } U$.

Es ist $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = (x_m x_m)^{1/2}$. Damit wird

$$\begin{aligned} \left[\text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right]_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{p_k x_k}{(x_m x_m)^{3/2}} = p_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_k (x_m x_m)^{-3/2} \right] \\ &= p_k \delta_{ik} (x_m x_m)^{-3/2} - \frac{3}{2} p_k x_k (x_m x_m)^{-5/2} (x_m \delta_{im} + x_m \delta_{im}) \\ &= \frac{p_i}{r^3} - \frac{3}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) x_i. \end{aligned}$$

Resultat:

$$\text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p}}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}$$

Die *Divergenz* haben wir bisher in der Form

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

aufgeschrieben. In der neuen Notation ist

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

und unter Verwendung der Summenkonvention

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Anmerkungen:

- Wir wissen bereits, daß wir mit Hilfe des *Nabla-Operators* $\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ die Divergenz symbolisch als das Skalarprodukt $\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ schreiben können. Im Indexkalkül ist

$$\vec{\nabla} \longrightarrow \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

und damit

$$\text{div } \vec{a} = \nabla_i a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

- Speziell für $\vec{a} = \vec{r}$ wird

$$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = 3.$$

- Der Laplace-Operator ist bei Beachtung der Summenkonvention

$$\Delta U = \text{div grad } U = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_i}.$$

9.2 Vektorprodukt und Rotation

Das Vektorprodukt ist, komponentenweise aufgeschrieben,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i=1}^3 (\vec{a} \times \vec{b})_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_j b_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k).$$

Um den Vorzeichenwechsel bei der Vertauschung der Faktoren in diesem Vektorprodukt zu erfassen, führen wir das *Levi-Civita-Symbol*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} (-1)^N & \text{wenn alle Indizes verschieden sind} \\ 0 & \text{wenn zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases}$$

mit drei Indizes ein. Darin ist N die Anzahl der Inversionen der natürlichen Reihenfolge 1-2-3, also die Antwort auf die Frage, wie oft ein Index mit größerem Zahlenwert vor einem Index mit kleinerem Zahlenwert steht.

Beispiele:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= 1, & \text{denn } N=0 \\ \varepsilon_{213} &= -1, & \text{denn } N=1 \text{ (2 vor 1)} \\ \varepsilon_{231} &= 1, & \text{denn } N=2 \text{ (2 vor 1 und 3 vor 1)} \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß jede Vertauschung zweier Indizes ein Minuszeichen erzeugt (Vorzeichenwechsel). Man sagt: ε_{ijk} ist *total antisymmetrisch*.

Anmerkung: ε_{ijk} wird oft „ ε -Tensor“ genannt, wobei wir Tensoreigenschaften an dieser Stelle jedoch nicht behandeln.

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols wird (bei Beachtung der Reihenfolge der Indizes auf der linken und rechten Seite)

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i,$$

denn nach der Multiplikationstabelle für das Vektorprodukt ist

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \varepsilon_{312} \vec{e}_3 = \vec{e}_3, & (\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}) \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= \varepsilon_{213} \vec{e}_2 = -\vec{e}_2, & (\vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}) \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \varepsilon_{123} \vec{e}_1 = \vec{e}_1, & (\vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}) \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \varepsilon_{k11} \vec{e}_k = 0, & (\vec{i} \times \vec{i} &= 0) \end{aligned}$$

usw.

Damit kann das *Vektorprodukt* unter Verwendung der Summenkonvention in der Form

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i \vec{e}_i = a_j b_k (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

geschrieben werden. Mit $\vec{e}_i \vec{e}_m = \delta_{im}$ folgt nach Multiplikation mit $\vec{e}_m$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_i \delta_{im} &= \varepsilon_{ijk} a_j b_k \delta_{im} \\ (\vec{a} \times \vec{b})_m &= \varepsilon_{mjk} a_j b_k. \end{aligned}$$

Beispiel: $(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

Dabei ist die Reihenfolge der Summationsindizes und der Faktoren zu beachten, denn das Vektorprodukt ist nicht kommutativ. In diesem Beispiel: Der erste Summationsindex j ist Index des ersten Faktors $\vec{a}$.

Die *Rotation* $\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$ können wir mit dem Levi-Civita-Symbol nun in der Form

$$(\text{rot } \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j a_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k$$

schreiben.

Beispiele:

a) $\vec{a} = \vec{r}$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{r})_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \\ &= \varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \delta_{jk} + \varepsilon_{ikj} \delta_{kj}), \quad (\text{Umbenennung } j \leftrightarrow k \text{ im 2. Summanden}) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{ikj}) \delta_{jk}, \quad \text{da } \delta_{jk} = \delta_{kj} \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}) \delta_{jk} = 0, \quad \text{da } \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

b) $\text{div rot } \vec{a}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j \partial x_i} \right), \quad (i \leftrightarrow j \text{ im 2. Summanden}) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{jik}) \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (\text{Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen}) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}) \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

c) $\text{rot grad } U$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \quad (\text{Begründung wie Beispiel (b)})$$

Eine wichtige Beziehung Wir beweisen schließlich noch die wichtige Beziehung

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

und illustrieren ihre Bedeutung durch zwei Anwendungen.

Wegen der Summation über i ist

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{1jk} \varepsilon_{1lm} + \varepsilon_{2jk} \varepsilon_{2lm} + \varepsilon_{3jk} \varepsilon_{3lm}.$$

Damit der erste Summand von Null verschieden ist, muß $j \neq k$ und $l \neq m$ sein, und j, k, l und m dürfen nicht gleich 1 sein. Eine Möglichkeit ist beispielsweise $j = 2, k = 3$ und $l = 3, m = 2$. Für diese Werte von j, k, l und m verschwinden aber der zweite und der dritte Summand. Entsprechendes gilt für den zweiten und den dritten Summanden, so daß von der Summe über i nur *ein* Summand übrig bleibt. Für diesen Summanden gibt es die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{132} \varepsilon_{132} = 1, & \varepsilon_{123} \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{132} \varepsilon_{123} = -1 \\ \varepsilon_{213} \varepsilon_{213} &= \varepsilon_{231} \varepsilon_{231} = 1, & \varepsilon_{213} \varepsilon_{231} &= \varepsilon_{231} \varepsilon_{213} = -1 \\ \varepsilon_{312} \varepsilon_{312} &= \varepsilon_{321} \varepsilon_{321} = 1, & \varepsilon_{312} \varepsilon_{321} &= \varepsilon_{321} \varepsilon_{312} = -1. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Übereinstimmung jedes dieser Summanden mit der zugehörigen rechten Seite der zu beweisenden Beziehung. Es ist mit den Eigenschaften des Kronecker-Symbols

$$\text{a) } \varepsilon_{123} \varepsilon_{123} = 1 : j = l = 2, \quad k = m = 3 \longrightarrow \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23} \delta_{32} = 1$$

$$\text{b) } \varepsilon_{123} \varepsilon_{132} = -1 : j = m = 2, \quad k = l = 3 \longrightarrow \delta_{23} \delta_{32} - \delta_{22} \delta_{33} = -1$$

usw.

Beispiele für die Anwendung der bewiesenen Beziehung:

a) Entwicklungssatz für das doppelte Vektorprodukt

Es ist

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m.$$

Wir bringen den doppelt auftretenden Summationsindex k an die gleiche (hier erste) Position in beiden Levi-Civita-Symbolen. In dem ersten der beiden Symbole ist $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj} = \varepsilon_{kij}$ und damit

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= (a_m c_m) b_i - (a_j b_j) c_i \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) b_i - (\vec{a} \cdot \vec{b}) c_i. \end{aligned}$$

$$\text{Resultat: } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

b) $\text{rot rot } \vec{a}$

Es ist

$$[\text{rot rot } \vec{a}]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{rot } \vec{a})_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} a_m.$$

Mit der gleichen Prozedur wie in Beispiel (a) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} [\text{rot rot } \vec{a}]_i &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_m \partial x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial a_m}{\partial x_m}}_{\text{div } \vec{a}} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= [\text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}]_i \end{aligned}$$

$$\text{Resultat: } \text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$$