

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiele, Begriffe und geometrische Bedeutung

Beispiele:

- | | | | |
|-----|---|--|---|
| 1) | $y' - cy = 0$, $c = \text{const}$ | Wachstum und Zerfall | } $y = Ae^{cx} - \frac{d}{c}$, A : Integrationskonstante |
| 2) | $y' - cy = d$, $d = \text{const}$ | Wachstum und Zerfall mit konstanter Zufuhr | |
| 3) | $m\dot{v} + \gamma v = mg$ | freier Fall mit Reibung | |
| 4) | $L\dot{I} + RI = U_0 \sin \omega t$ | R-L-Schwingkreis | |
| 5) | $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ | freie, ungedämpfte Schwingung | |
| 6) | $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ | freie, gedämpfte Schwingung | } R.P. Feynman:
"The same equations have the same solutions" |
| 7) | $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$ | L-R-C Schwingkreis | |
| 8) | $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$ | erzwungene Schwingung | |
| 9) | $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ | nichtlineare Pendelschwingung | |
| 10) | $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ | Wellengleichung | |

Begriffe

1) Gewöhnlich - partiell

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ y = y(x) & \phi(x, y, z, t) \end{array}$$

2) Ordnung: höchste vorkommende Ableitung

(1) ... (4): 1. Ordnung

(5) ... (10): 2. Ordnung

3) Linear - nichtlinear

$$\begin{cases} \rightarrow y' + P(x)y = Q(x) & \text{Linear, 1. Ordnung} \\ \rightarrow ay'' + by' + cy = F(x) & \text{Linear, 2. Ordnung} \\ & \text{Konstante Koeffizienten} \end{cases}$$

nichtlinear: (9) $\sin \varphi$

4) Homogen - inhomogen

$$\begin{array}{cc} \downarrow \\ (1), (5) \dots (7) & Q(x), F(x) \\ (10) & (2) \dots (4), (8) \end{array}$$

5) Integral - Quadratur

6) Allgemeine Lösung - Partikulärlösung

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{Integrationskonst.} & \text{Anfangsbedingungen} \end{array}$$

Beispiel: (1) $y = Ae^{cx}$, allg. Lösung

$$x = x_0: y(x_0) = y_0$$

$$y(x_0) = Ae^{cx_0} \stackrel{!}{=} y_0$$

$$A = y_0 e^{-cx_0}$$

Partikulärlösung: $y = y_0 e^{c(x-x_0)}$

(oft: $x_0 = 0$, $y(0) = y_0$ „Anfangswert“)

Beweis: für (1), einzige Lösung
Annahme des Gegenteils

$$y = f(x) = f(0) e^{cx}$$

Annahme: es gibt 2. Lösung $g(x)$

$$g'(x) = c \cdot g(x)$$

$$g(0) = f(0)$$

betrachten $h(x) = e^{-cx} \cdot g(x) \rightarrow h(0) = g(0) = f(0)$

$$\underline{h'(x)} = -c e^{-cx} \cdot g + e^{-cx} \cdot g' = -c e^{-cx} \cdot g + e^{-cx} \cdot c g = \underline{0}$$

$$\rightarrow h = \text{const} = h(0)$$

Resultat: $h(x) = e^{-cx} g(x) = f(0)$

$$\underline{g(x)} = f(0) e^{cx} = \underline{f(x)} \quad \text{q.e.d.}$$

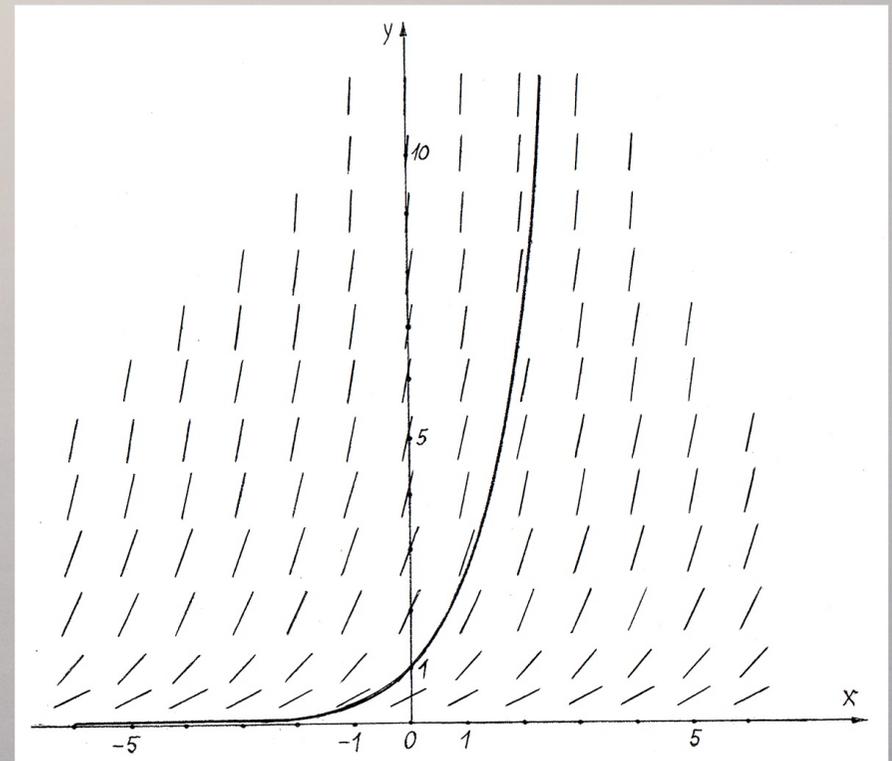
Geometrische Bedeutung von Differentialgleichungen.

Richtungsfeld

Beispiel (1): $c=1$

$y' = y$, Lösung: Integralkurve

(Geschwindigkeitsfeld,
Flußlinien)



Separable Differentialgleichungen

- 1. Ordnung

- $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

- nichtlinear

- Spezialfall: lineare, homogene
Differentialgl. 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 ; \quad g(x) = -P(x)$$
$$h(y) = y$$

Lösungsverfahren:

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x) \quad \Bigg| \int dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int g(x) dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{dy}$ (Substitutionsregel)

$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$, Trennung
der Variablen

- implizite Lösung

- eine Integrationskonstante
(Anfangsbedingung)

Beispiele

1. Wachstum und Zerfall (1)

$$\frac{dy}{dx} - cy = 0 ; \quad \text{1. Ordnung, linear}$$

homogen, konstante
Koeffizienten

$$\frac{dy}{dx} = cy \quad \text{separabel}$$
$$g(x) = c = \text{const}$$
$$h(y) = y$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = c \quad \Bigg| \int dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln|y| + C_1 = cx + C_2$$

$$\ln|y| = cx + C ; \quad C = C_2 - C_1$$

$$|y| = e^{cx + C}$$

$y = Ae^{cx}$, $A = \pm e^C$

2. Orthogonaltrajektorien

Beispiel: $y = kx^2$, $k \geq 0$, const

$$\frac{dy}{dx} = 2kx = 2 \frac{y}{x}$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0$; 1. Ordnung, linear, homogen
Koeffizient nicht konstant

separabel: $g(x) = \frac{2}{x}$
 $h(y) = y$

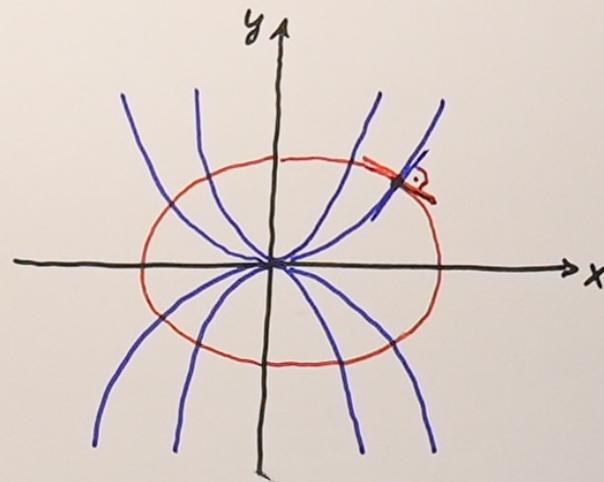
Richtungsfeld: $m = 2 \frac{y}{x}$

Orthogonaltrajektorien: $m_{\perp} = -\frac{1}{m} = -\frac{x}{2y}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y} = 0$; 1. Ordnung, homogen
nicht linear

separabel: $g(x) = -\frac{x}{2}$
 $h(y) = \frac{1}{y}$



$$y \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} \quad | \int dx$$

$$\int y dy = -\frac{1}{2} \int x dx$$

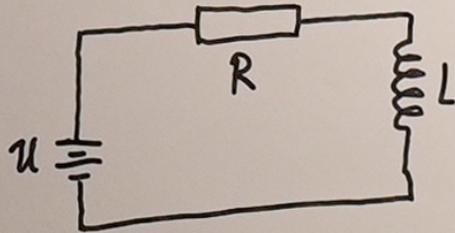
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{4} + C$$

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = c, \quad c = 2C$$

$$\frac{x^2}{2c} + \frac{y^2}{c} = 1, \quad \text{Ellipsenschar}$$

Achsenverhältnis $\sqrt{2} : 1$

3. R-L-Schwingkreis



$U = \text{const}$

Stromstärke I

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}$$

1. Ordnung, linear, konstante Koeffizienten
inhomogen

separabel: $\frac{dI}{dt} = \frac{U - RI}{L}$; $g(t) = 1$
 $h(I) = \frac{U - RI}{L}$

Lösung: $\frac{L}{U - RI} \frac{dI}{dt} = 1 \quad \Big| \int dt$

$$-\frac{L}{R} \ln|U - RI| = t + C, \quad C = \text{const}$$

$$|U - RI| = e^{-\frac{R}{L}(t+C)}$$

$$U - RI = A e^{-\frac{R}{L}t}, \quad A = \pm e^{-\frac{R}{L}C}$$

$$I(t) = \frac{U}{R} - \frac{A}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

allgemeine
Lösung

Einarbeiten der Anfangsbedingung

$$t=0: I(0) \stackrel{!}{=} I_0$$

$$I(0) = \frac{U}{R} - \frac{A}{R} = I_0$$

$$A = U - RI_0$$

Partikulärlösung:

$$I(t) = \frac{U}{R} - \left(\frac{U}{R} - I_0 \right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

Diskussion: $t \rightarrow \infty, I = \frac{U}{R}$

Die inhomogene, Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\underline{\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)}$$

Lösungsweg

1. Schritt: zugeordnete homogene Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0, \text{ separabel}$$

$q(x) = -P(x)$
 $h(y) = y$

Trennung der Variablen

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -P(x) \quad \left| \int dx \right.$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x) dx$$

$$\ln|y| = - \int P(x) dx + C$$

$$\underline{y_h = A e^{-\int P(x) dx}}, \quad A = \pm e^C$$

allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

2. Schritt: Variation der Konstanten

$$A \rightarrow u(x)$$

$$\text{Ansatz: } y = u(x) e^{-\int P(x) dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} e^{-\int P(x) dx} - \underbrace{u(x) e^{-\int P(x) dx}}_y \cdot P(x)$$

inhomogene Differentialgleichung:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x) dx} - \cancel{P(x) \cdot y} + \cancel{P(x) \cdot y} = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx}$$

$$u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x') dx'} dx + C$$

Lösung:

$$y(x) = \left[\int Q(x) e^{\int P(x') dx'} dx + C \right] e^{-\int P(x) dx}$$

Diskussion

- allgemeine Lösung

- $I(x) \equiv \int P(x) dx$, $\frac{dI}{dx} = P(x)$

$$y(x) = \left[\int Q(x) e^{I(x)} dx \right] e^{-I(x)} + C e^{-I(x)}$$

2. Summand: $y_h = C e^{-I(x)}$

$$\frac{dy_h}{dx} = - \underbrace{C e^{-I(x)}}_{y_h} \cdot \frac{dI}{dx} = -y_h P(x)$$

$$\frac{dy_h}{dx} + P(x) y_h = 0$$

1. Summand: spezielle Lösung
(Partikulärlösung) der
inhomogenen Gleichung

$$y_p = \left[\int Q(x) e^{I(x)} dx \right] e^{-I(x)}$$

$$\frac{dy_p}{dx} = \left[\frac{d}{dx} \int Q(x) e^{I(x)} dx \right] e^{-I(x)} - \left[\int Q(x) e^{I(x)} dx \right] e^{-I(x)} \frac{dI}{dx}$$

$$= \left[Q(x) e^{I(x)} \right] e^{-I(x)} - y_p \cdot P(x)$$

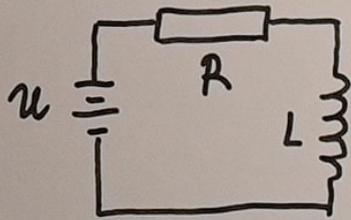
$$= Q(x) - y_p \cdot P(x)$$

$$\frac{dy_p}{dx} + P(x) \cdot y_p = Q(x)$$

Resultat. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ allgemeine Lösung

Die inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung - Beispiele

1. Beispiel R-L-Schwingkreis



$$u = \text{const} \rightarrow u(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$$

$$\rightarrow P(t) = \frac{R}{L} = \text{const}$$

$$Q(t) = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$$

1. Schritt: homogene Gleichung

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I$$

Trennung der Variablen: $\frac{1}{I} \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \quad \left| \int dt \right.$

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int dt$$

$$I_h(t) = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

2. Schritt: Variation der Konstanten

Ansatz: $I(t) = u(t) e^{-\frac{R}{L} t}$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{du}{dt} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} \underbrace{u(t) e^{-\frac{R}{L} t}}_{I(t)}$$

in inhomogene Gleichung:

$$\frac{du}{dt} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} I + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t$$

$$u(t) = \frac{U_0}{L} \frac{e^{\frac{R}{L} t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t\right) + C$$

Resultat:

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t\right) + C e^{-\frac{R}{L} t}$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Einarbeitung der Anfangsbedingung $I(0) \stackrel{!}{=} I_0$

$$I(0) = \frac{U_0}{L} \frac{-\omega}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} + C = I_0$$

$$C = I_0 + \frac{U_0}{L} \frac{\omega}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}$$

2. Beispiel: Radioaktiver Zerfall

Radium \rightarrow Radon \rightarrow Polonium

Ra - Index 1: $N_1(0) = N_0$, Zerfallskonstante λ_1

Rn - " - 2: $N_2(0) = 0$, " " λ_2

Zerfall des Radiums: $\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 < 0$
 $\rightarrow N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}$

Radon: $\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

\uparrow \uparrow
 P(t) Q(t)

1. Schritt: homogene Gleichung

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 \rightarrow N_2(t) = A e^{-\lambda_2 t}$$

2. Schritt: Variation der Konstanten

Ansatz: $N_2(t) = u(t) e^{-\lambda_2 t}$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{du}{dt} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 u(t) e^{-\lambda_2 t}$$

$N_2(t)$

in inhomogene Gleichung:

$$\frac{du}{dt} e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 N_2 + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 N_0 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

$$u(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\underline{N_2(t) = u(t) e^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + C e^{-\lambda_2 t}}$$

Einarbeitung der Anfangsbedingung:

$$N_2(0) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + C \stackrel{!}{=} 0$$

$$C = -\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

spezielle Lösung:

$$\underline{N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}$$

Exakte und nicht exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentialgleichungen

mit bisherigen Methoden nicht lösbar, z.B.

$$(x^2 \cos y - x^2 y \sin y) \frac{dy}{dx} + 2xy \cos y + x^2 = 0$$

$$(x^2 \cos y - x^2 y \sin y) dy + (2xy \cos y + x^2) dx = 0$$

$$\underline{A(x,y) dx + B(x,y) dy = 0}$$

sei $U = U(x,y)$:

vollständiges Differential $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$

$$\text{falls } \left. \begin{array}{l} A(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \\ B(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} \end{array} \right\} \underline{dU(x,y) = 0}$$

Funktion U existiert, falls $\underline{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}}$, Integrabilitätsbedingung

falls Integrabilitätsbedingung erfüllt: Differentialgleichung exakt

Lösung: $\underline{U(x,y) = \text{const}}$

1. Beispiel:

$$A(x,y) = 2xy \cos y + x^2$$

$$B(x,y) = x^2 \cos y - x^2 y \sin y$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x \cos y - 2xy \sin y \quad \left. \vphantom{\frac{\partial A}{\partial y}} \right\} \begin{array}{l} \text{Integrabilitäts-} \\ \text{bedingung} \end{array}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 2x \cos y - 2xy \sin y \quad \left. \vphantom{\frac{\partial B}{\partial x}} \right\} \text{erfüllt}$$

→ Bestimmung von $U(x,y)$

1. Schritt:

$$A(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy \cos y + x^2$$

Integration:

$$U(x,y) = x^2 y \cos y + \frac{x^3}{3} + g(y)$$

$$u(x,y) = x^2 y \cos y + \frac{x^3}{3} + g(y)$$

$$2. \text{ Schritt: } \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y - x^2 y \sin y + \frac{dg}{dy} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial u}{\partial y}} \right\} \frac{dg}{dy} = 0$$

$$3. \text{ Schritt: außerdem} \\ B(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y - x^2 y \sin y \quad \left. \vphantom{\frac{\partial u}{\partial y}} \right\} g(y) = C = \text{const}$$

4. Schritt: Resultat

$$u(x,y) = x^2 y \cos y + \frac{x^3}{3} + C = \text{const}$$

$$\underline{x^2 y \cos y + \frac{x^3}{3} = C}$$

1. Beispiel: Separable Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$g(x) dx - \frac{1}{h(y)} dy = 0 \rightarrow \begin{aligned} A(x,y) &= g(x) \\ B(x,y) &= -\frac{1}{h(y)} \end{aligned}$$

$$\text{Integrabilitätsbedingung: } \frac{\partial A}{\partial y} = 0 = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \checkmark$$

Alle separablen Differentialgleichungen sind exakt.

Bestimmung von $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x) \rightarrow u(x,y) = \int g(x) dx + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dy} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial u}{\partial y}} \right\} \frac{df}{dy} = -\frac{1}{h(y)}$$

$$\text{andererseits: } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{h(y)}$$

$$f(y) = -\int \frac{dy}{h(y)}$$

$$\text{damit } u(x,y) = \int g(x) dx - \int \frac{dy}{h(y)} = C$$

$$\underline{\int g(x) dx = \int \frac{dy}{h(y)}}$$

Exakte und nicht exakte Differentialgleichungen

Nicht exakte Differentialgleichungen. Der integrierende Faktor

Beispiel: $x \frac{dy}{dx} - xy^2 - y = 0$

$$(xy^2 + y)dx - x dy = 0$$

$$A(x, y) = xy^2 + y$$

$$B(x, y) = -x$$

Integrabilitätsbedingung: $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial y} = 2xy + 1 \\ \frac{\partial B}{\partial x} = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nicht erfüllt} \\ \rightarrow \text{nicht exakt} \end{array}$

Idee: integrierender Faktor $\lambda(x, y)$

$$(\lambda A) dx + (\lambda B) dy = 0$$

Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial}{\partial y}(\lambda A) \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda B)$

$$A \frac{\partial \lambda}{\partial y} - B \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right) = 0$$

Bestimmungsgleichung für λ

$$y(xy+1) \frac{\partial \lambda}{\partial y} + x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2\lambda(xy+1) = 0$$

sei $\lambda = \lambda(y)$: $y \frac{d\lambda}{dy} + 2\lambda = 0$

Trennung der Variablen: $\int \frac{d\lambda}{\lambda} = -2 \int \frac{dy}{y}$

$$\ln \lambda = -2 \ln y + C$$

$$\lambda = \frac{1}{y^2}$$

damit $(x + \frac{1}{y}) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$

Integrabilitätsbedingung:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(x + \frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{erfüllt} \\ \rightarrow \text{exakt} \end{array}$$

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Lösungsschritte:

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{1}{y} \rightarrow u = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + g(y)$$

$$2. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{dg}{dy} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \downarrow \end{array} \right\} \frac{dg}{dy} = 0, \quad g = C = \text{const}$$

$$3. \quad \text{außerdem: } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$4. \quad u(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + C$$

Resultat: $u(x, y) = \text{const}$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C'$$

$$\text{explizit: } \underline{y = \frac{2x}{2C' - x^2}}$$

2. Beispiel: allgemeine, lineare, inhomogene
Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

$$\underbrace{[P(x) \cdot y - Q(x)] dx + dy}_{A(x, y)} = 0 \quad \downarrow \quad B(x, y) = 1$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = P(x) \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad \text{nicht erfüllt}$$

nicht exakt

Integrierender Faktor: Bestimmungsgleichung

$$[P(x) \cdot y - Q(x)] \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \cdot P(x) = 0$$

$$\text{sei } \lambda = \lambda(x) : \quad \frac{d\lambda}{dx} = \lambda \cdot P(x)$$

$$\text{Trennung der Variablen: } \int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int P(x) dx$$

$$\underline{\lambda = e^{\int P(x) dx}}$$

Lösungsschritte:

$$1. \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda B, \quad B=1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda(x)$$

$$u = \lambda(x) \cdot y + f(x)$$

$$2. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx} \cdot y + \frac{df}{dx} = \lambda \cdot P(x) \cdot y + \frac{df}{dx}$$

$$3. \text{ außerdem } \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda A \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \cdot P(x) \cdot y - \lambda Q(x)$$

$$\text{zusammen: } \frac{df}{dx} = -\lambda \cdot Q(x)$$

$$f(x) = -\int \lambda(x) \cdot Q(x) dx$$

$$4. \text{ Resultat: } u = \lambda \cdot y + f = C'$$

$$\text{explizit } y = \frac{1}{\lambda} (-f + C') = e^{-\int P(x) dx} \left[C' + \int Q(x) e^{\int P(x') dx'} dx \right]$$

3. Beispiel: Separable Differentialgleichung.

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$g(x) dx - \frac{1}{h(y)} dy = 0 \quad \text{exakt}$$

$$g(x) \cdot h(y) dx - dy = 0$$

$$A(x,y) = g(x) h(y), \quad B(x,y) = -1$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial y} = g(x) \frac{dh}{dy} \\ \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{nicht erfüllt} \\ \text{nicht exakt} \end{array}$$

$$\text{Vergleich: } \lambda(y) = \frac{1}{h(y)}$$

Die lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die charakteristische Gleichung, die Wronski-Determinante

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0, \quad \begin{array}{l} \text{Linear, 2. Ordnung} \\ \text{homogen} \\ a, b, c = \text{const}; a \neq 0 \end{array}$$

Lösungsansatz: Exponentialansatz

$$y = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \text{const}$$

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

in Differentialgleichung: $(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$

$$\underline{\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0}, \quad \begin{array}{l} \text{charakteristische Gleichung} \\ \text{(--- Polynom)} \end{array}$$

$$\text{Lösungen: } \underline{\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$\underline{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$$

Linearkombination

„Probe“:

$$\begin{aligned} & a(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 \underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + c_2 \underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0} \end{aligned}$$

$$= 0$$

zu zeigen: Linearkombination ist allgemeine Lösung

c_1, c_2 bestimmbar für beliebige Anfangsbedingungen
 $y(x_0), y'(x_0)$

$$\begin{array}{l|l} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) & y_1'(x_0) \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) & y_2(x_0) \end{array} -$$

$$c_1 = \frac{y(x_0) y_2'(x_0) - y_2(x_0) y'(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_2(x_0) y_1'(x_0)}$$

analog
$$c_2 = - \frac{y(x_0) y_1'(x_0) - y_1(x_0) y'(x_0)}{y_1(x_0) y_2'(x_0) - y_2(x_0) y_1'(x_0)}$$

Bedingung: $W(y_1, y_2; x) = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) \neq 0$ Wronski-Determinante

→ $y_1(x), y_2(x)$ Fundamentalsystem

Anmerkungen: 1.) $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$$W(y_1, y_2; x) = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad W' &= y_1' y_2'' - y_2' y_1'' \\ &= y_1' \left(-\frac{b}{a} y_2' - \frac{c}{a} y_2 \right) - y_2' \left(-\frac{b}{a} y_1' - \frac{c}{a} y_1 \right) \\ &= -\frac{b}{a} (y_1 y_2' - y_2 y_1') \end{aligned}$$

$W' = -\frac{b}{a} W$, Lösung: Exponentialfunktion

Problem: Doppelwurzel bei $b^2 - 4ac = 0$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

Lösung: $y = c_1 e^{\lambda_1 x}$

Variation der Konstanten: $c_1 \rightarrow u(x)$

Ansatz: $y = u(x) e^{\lambda_1 x}$

$$y' = u \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + u' e^{\lambda_1 x}$$

$$y'' = u \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2u' \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + u'' e^{\lambda_1 x}$$

in Differentialgleichung:

$$a(u \lambda_1^2 + 2u' \lambda_1 + u'') e^{\lambda_1 x} + b(u \lambda_1 + u') e^{\lambda_1 x} + c u e^{\lambda_1 x} = 0$$

$$a u'' + u' \underbrace{(2a \lambda_1 + b)}_{=0} + u \underbrace{(a \lambda_1^2 + b \lambda_1 + c)}_{=0} = 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$$

charakteristische Gleichg.

$u'' = 0$

$$u'' = 0$$

$$u = C_1 + C_2 x$$

Resultat: $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$

Fundamentalsystem: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$
 $y_2 = x \cdot e^{\lambda_1 x}$

Wronski-Determinante: $W(y_1, y_2; x) = e^{2\lambda_1 x}$
 $\neq 0$ für alle x

Begründung des Exponentialansatzes

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) y = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) \left(\frac{dy}{dx} - \lambda_2 y\right) = \frac{d^2 y}{dx^2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{dy}{dx} + \lambda_1 \lambda_2 y = 0$$

Vergleich: $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$
 $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$ } Viétascher Wurzelsatz

ebenso: $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right) y = 0$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} - \lambda_1 y = 0$ } zwei Differential-
und $\frac{dy}{dx} - \lambda_2 y = 0$ } gleichungen 1. Ordnung

Lösungen: $y = e^{\lambda_1 x}$, $y = e^{\lambda_2 x}$
(siehe Exponentialansatz)

Die lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiele

1. Beispiel: $2y'' - 3y' + y = 0$

Anfangsbedingungen: $y(0) = 1, y'(0) = 0$

Lösungsschritte:

1. charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Fundamentalsystem:

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{x/2}; W(y_1, y_2; x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x} \neq 0$$

2. allgemeine Lösung: $y = C_1 e^x + C_2 e^{x/2}$

3. Einarbeiten der Anfangsbedingungen

$$y(0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$y' = C_1 e^x + \frac{1}{2}C_2 e^{x/2} \rightarrow y'(0) = C_1 + \frac{1}{2}C_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{array} \right\}$$

4. Partikulärlösung: $y = 2e^{x/2} - e^x$

2. Beispiel: $y'' + 2y' + 2y = 0$

Lösungsschritte:

1. charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 + i$$
$$\lambda_2 = -1 - i = \lambda_1^*$$

Fundamentalsystem:

$$y_1 = e^{(-1+i)x}, y_2 = e^{(-1-i)x}; W(y_1, y_2; x) = -2ie^{-2x}$$

2. allgemeine Lösung

$$y = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x}; C_1, C_2 \text{ komplex}$$

$$= e^{-x} (C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}), \text{ Eulersche Formel}$$

$$= e^{-x} [(C_1 + C_2) \cos x + i(C_1 - C_2) \sin x]$$

$$y = e^{-x} (A \cos x + B \sin x); A, B \text{ reell}$$

Zusammenhang: $A = C_1 + C_2$

$$B = i(C_1 - C_2)$$

Die freie, ungedämpfte Schwingung

Newton'sches Grundgesetz
1-dimensionale Bewegung

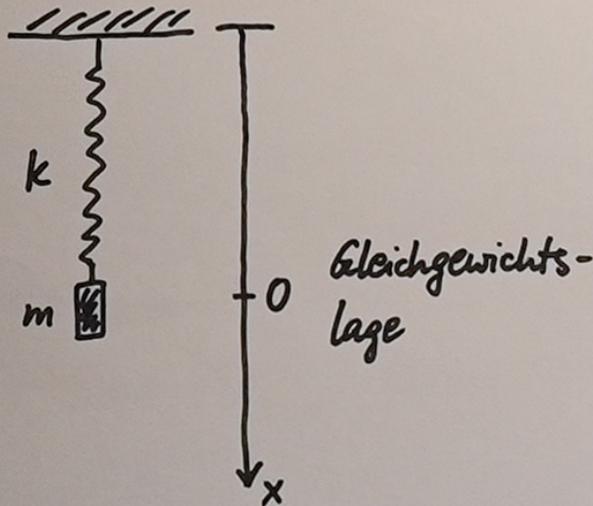
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

$F(x)$: Hookesches Gesetz $F(x) = -kx$, $k = \text{const} > 0$

$x > 0$: $F < 0$
u. umgekehrt

→ rücktreibende Kraft

Federschwinger:



$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Eigenfrequenz

$$(a=1, b=0, c=\omega_0^2)$$

„Erraten“: $x(t) = A \cos \omega_0 t$
 $x(t) = B \sin \omega_0 t$

Konstruktion der Lösung

1.) charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = i\omega_0, \quad \lambda_2 = -i\omega_0$$

Fundamentalsystem:

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t}, \quad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

Wronski-Determinante:

$$W(x_1, x_2; t) = -2i\omega_0 \neq 0$$

2.1 allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad c_1, c_2 \text{ komplex}$$

$$= (c_1 + c_2) \cos \omega_0 t + i(c_1 - c_2) \sin \omega_0 t, \quad \text{Eulersche Formel}$$

$$= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad A, B \text{ reell.}$$

Bedeutung der Konstanten A und B:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$ Anfangslage

$\dot{x}(0) = v_0$ Anfangsgeschwindigkeit

$$x(0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = f(t)$$

Eindeutigkeit der Lösung. Die „Methode Energiesatz“

1.) Annahme: andere Lösung $g(t)$

$$\ddot{g}(t) = -\omega_0^2 g(t)$$

$$g(0) = f(0), \quad \dot{g}(0) = \dot{f}(0)$$

2.) für jede Lösung $h(t)$ der Differentialgleichung

$$E = \frac{m}{2} (\dot{h}^2 + \omega_0^2 h^2) = \text{const}$$

$$\dot{E} = \frac{m}{2} (2\dot{h}\ddot{h} + 2\omega_0^2 h\dot{h})$$

$$= m\dot{h} \underbrace{(\ddot{h} + \omega_0^2 h)}_{=0} = 0$$

3.) speziell $h(t) = f(t) - g(t)$

$$\rightarrow h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 0$$

$$E = \text{const} = 0$$

$$\dot{h}^2 + \omega_0^2 h^2 = 0$$

$$\rightarrow h = f - g = 0$$

$$g(t) = f(t) \quad \text{q.e.d.}$$

Andere Darstellung der Lösung

$$\underline{x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t}$$

schreibbar als

$$x = \alpha \cos(\omega_0 t - \theta), \text{ Additionstheorem}$$

$$= \alpha \cos \theta \cdot \cos \omega_0 t + \alpha \sin \theta \cdot \sin \omega_0 t$$

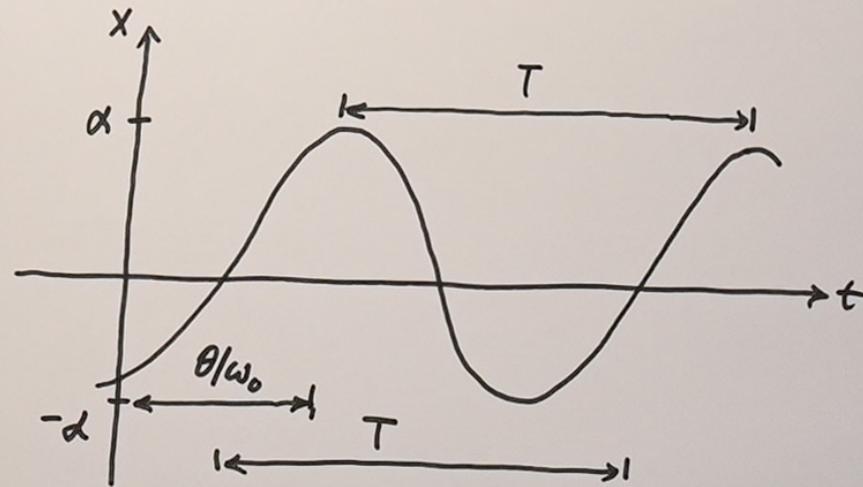
$$\rightarrow A = \alpha \cos \theta \quad (\text{Polarkoordinaten})$$

$$B = \alpha \sin \theta$$

$$\underline{x(t) = \alpha \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{\theta}{\omega_0} \right) \right]}$$

harmonische Schwingung

$$\alpha = \text{const}$$



α : Amplitude

T : Schwingungsdauer, $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu_0}$

$\frac{\theta}{\omega_0}$: Phasenverschiebung

(θ : Phasenwinkel)

Linearisierte Schwingungen und Gleichgewichtslagen

Newtonsches Bewegungsgesetz
1-dimensionale Bewegung

$$m\ddot{x} = F(x)$$

$$x_0: \text{Nullstelle } F(x_0) = 0$$

$$\text{Lineare Approximation: } F(x) = F(x_0) + F'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\text{Bewegungsgesetz: } m\ddot{x} = F'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\text{Substitution: } \xi \equiv x - x_0, \quad \ddot{\xi} = \ddot{x}$$

$$m \ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi$$

Fallunterscheidung

$$1. \text{ Fall: } \underline{F'(x_0) < 0}$$

$$k \equiv -F'(x_0) > 0, \quad \omega_0 = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}}$$

$$m \ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi = -k \xi$$

$$\underline{\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0}$$

$$\text{Lösung: } \xi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$\underline{x(t) = x_0 + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t}$$

Resultat: Schwingung

→ x_0 stabile Gleichgewichtslage

$$2. \text{ Fall: } \underline{F'(x_0) > 0}$$

$$k \equiv F'(x_0) > 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{F'(x_0)}{m}}$$

$$m \ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi = k \xi$$

$$\underline{\ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0}$$

$$\text{Lösung: } \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \xrightarrow{\omega_0 \rightarrow i\omega_0} \ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0$$

$$\xi = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \xrightarrow{\omega_0 \rightarrow i\omega_0}$$

$$\xi = A \cosh \omega_0 t + i B \sinh \omega_0 t$$

$$\underline{\xi = C e^{\omega_0 t} + D e^{-\omega_0 t}}$$

$$C = \frac{1}{2}(A + iB)$$

$$D = \frac{1}{2}(A - iB)$$

$$\xi = C e^{\omega_0 t} + D e^{-\omega_0 t}$$

1. Fall: $C \neq 0, D \neq 0$

$$\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

„Runaway-Lösung“

2. Fall: $C=0, D \neq 0$

$$\xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0$$

„Kriechbewegung“

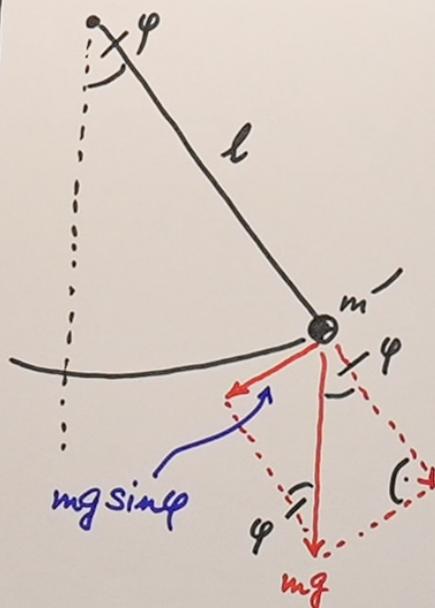
Resultat: x_0 instabiler (labiler)
Gleichgewichtspunkt

Anmerkung: $F(x) = -\frac{dU}{dx}$, U : Potential

stabil: Potentialminimum x_0
(nach oben geöffnete Parabel)

instabil: Potentialmaximum x_0
(nach unten geöffnete Parabel)

Beispiel: Fadenpendel



$$m l \ddot{\varphi} = -m g \sin \varphi$$

Vergleich: $m \ddot{x} = F(x)$, $x \rightarrow \varphi$

$$\rightarrow F(\varphi) = -\frac{m g}{l} \sin \varphi$$

$$F'(\varphi) = -\frac{m g}{l} \cos \varphi$$

Nullstellen $F(\varphi_0) = 0$:

1.) $\varphi_0 = 0$, $F'(0) = -\frac{m g}{l} < 0$, stabil

Bewegungsgleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{-\frac{m}{F'(0)}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.) $\varphi_0 = \pi$, $F'(\pi) = \frac{m g}{l} > 0$, instabil
(invertiertes Pendel)

Die freie, gedämpfte Schwingung

Newtonsche Bewegungsgleichung

1-dimensionale Bewegung

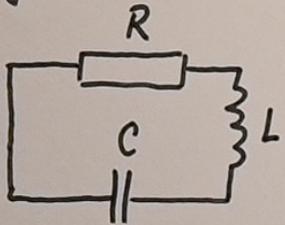
$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}, \quad k > 0$$

$$\gamma > 0$$

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ Eigenfrequenz}$$

$$\beta = \frac{\gamma}{m} \text{ Reibungskoeffizient}$$

Analogie: R-L-C-Schwingkreis



$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Konstruktion und Diskussion der Lösung

1. charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (a=1, b=\beta, c=\omega_0^2)$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}$$

Fallunterscheidung

1.) Fall $\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0$

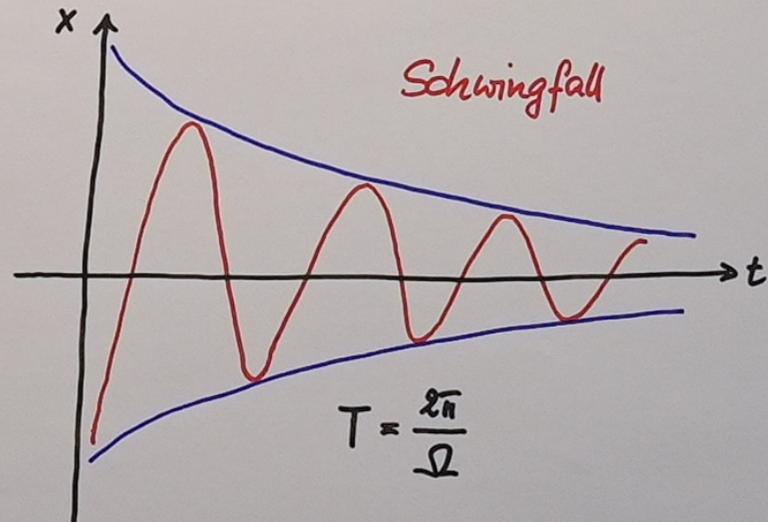
$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm i\Omega, \quad \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2}$$
$$= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega_0^2}} < \omega_0$$

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t} (c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t})$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2}t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \alpha \cos(\Omega t - \theta)$$

$$A = c_1 + c_2 = \alpha \cos \theta, \quad B = i(c_1 - c_2) = \alpha \sin \theta$$



Schwingfall: Dämpfung „schwach“
 „unterkritisch“ $\beta < 2\omega_0$

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0 = A$
 $\dot{x}(0) = 0 = \Omega B - \frac{\beta}{2} x_0 \rightarrow B = \frac{\beta}{2\Omega} x_0$

$$\alpha^2 = A^2 + B^2 = x_0^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{4\Omega^2} \right) = x_0^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}$$

Partikulärlösung: $x = \frac{x_0 \omega_0}{\Omega} e^{-\frac{\beta}{2}t} \cos(\Omega t - \theta)$, $\tan \theta = \frac{\beta}{2\Omega} = \frac{B}{A}$

2. Fall: $\beta^2 - 4\omega_0^2 > 0$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm \hat{\Omega}, \quad \hat{\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}, \quad \text{reell}$$

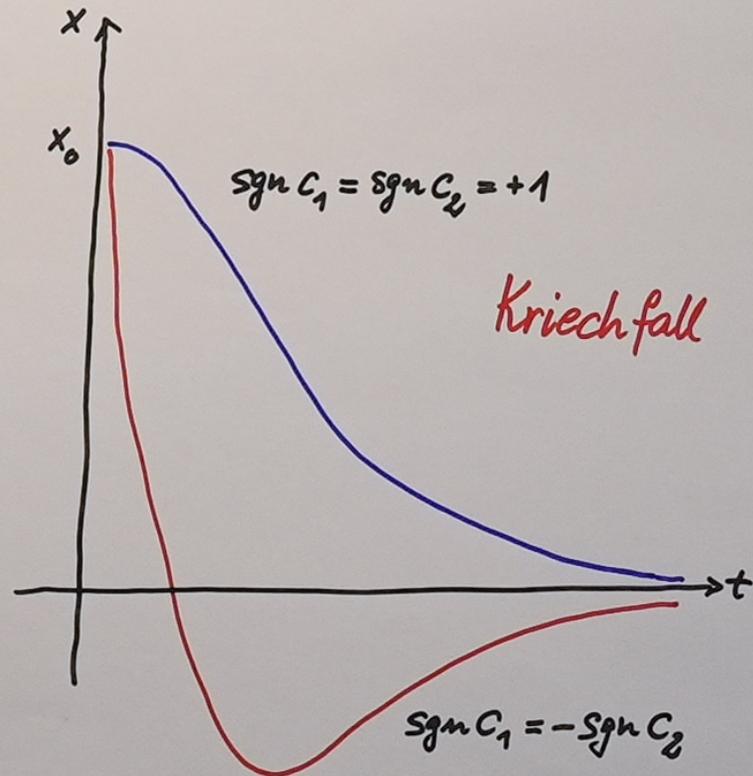
$\hat{\Omega} < \frac{\beta}{2}$

allgemeine Lösung: $x = e^{-\frac{\beta}{2}t} (C_2 e^{-\hat{\Omega}t} + C_1 e^{\hat{\Omega}t})$
 $= e^{-\frac{\beta}{2}t} (A \cosh \hat{\Omega}t + B \sinh \hat{\Omega}t)$

$$A = C_1 + C_2$$

$$B = C_1 - C_2$$

Dämpfung „stark“
 „überkritisch“ $\beta > 2\omega_0$



3. Fall: $\beta^2 - 4\omega_0^2 = 0$

reelle Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2} < 0$

$x(t) = (c_1 + c_2 \cdot t) e^{-\frac{\beta}{2}t}$ $\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

aperiodischer Grenzfall

Dämpfung „kritisch“ $\beta = 2\omega_0$.

Die lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\underline{a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = F(x)}, \quad a = \text{const} \neq 0$$

$$b, c = \text{const}$$

$F(x)$: Inhomogenität

Struktur der Lösung

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$, allgemeine Lösung von $ay'' + by' + cy = 0$

y_p spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$y = y_h + y_p = (C_1 y_1 + C_2 y_2) + y_p$ allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} a(y_h'' + y_p'') + b(y_h' + y_p') + c(y_h + y_p) \\ = \underbrace{(ay_h'' + by_h' + cy_h)}_{=0} + \underbrace{(ay_p'' + by_p' + cy_p)}_{=F(x)} = F(x) \end{aligned}$$

$y = y_h + y_p$ einzige Lösung zu bestimmten Anfangsbedingungen

Annahme: außer $y = f(x)$ existiert andere Funktion $g(x)$

- falls $g(x)$ Lösung der inhomogenen Gleichung
→ $[g(x) - y_p]$ ist Lösung der homogenen Gleichung

- y_h allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$g(x) - y_p = y_h$$

$$g(x) = y_h + y_p = f(x) \quad \text{q.e.d.}$$

Auffinden der Partikulärösung y_p

1. Verfahren: Lösung von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

1. Schritt: Faktorisieren die L.H.S. der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y = \frac{1}{a}F(x) \quad ; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$$
$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$$

2. Schritt: $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y \equiv y' - \lambda_2 y = u(x)$

damit $\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)u = \frac{1}{a}F(x)$

3. Schritt: $u' - \lambda_1 u = \frac{1}{a}F(x)$, 1. Ordnung
inhomogen

Lösung durch Variation der Konstanten

Resultat: $u(x)$

4. Schritt: $y' - \lambda_2 y = u(x)$, 1. Ordnung
inhomogen

Variation der Konstanten

Resultat: $y(x)$

Beispiel: $y'' + y' - 2y = e^{2x}$

1. Schritt: charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$
$$\rightarrow \lambda_2 = -2$$

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} + 2\right)y = e^{2x}$$

2. Schritt: $y' + 2y = u(x)$

$$u' - u = e^{2x}$$

3. Schritt: $u' - u = e^{2x}$

- homogene Gleichung $\frac{du}{dx} = u$

$$u = Ae^x$$

- Variation der Konstanten: $u = f(x) \cdot e^x$

$$f'e^x + fe^x - fe^{2x} = e^{2x}$$

$$\frac{df}{dx} = e^x \rightarrow f(x) = e^x + C_1$$

- Lösung: $u = e^{2x} + C_1 e^x$

4. Schritt: $y' + 2y = e^{2x} + C_1 e^x$

- homogene Gleichung $\frac{dy}{dx} = -2y$

$$y = Be^{-2x}$$

- Variation der Konstanten: $y = g(x)e^{-2x}$

$$g'e^{-2x} - 2ge^{-2x} + 2ge^{-2x} = e^{2x} + C_1 e^x$$

$$\frac{dg}{dx} = e^{4x} + C_1 e^{3x}$$

$$\rightarrow g(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{3}C_1 e^{3x} + C_2, \quad (\hat{C}_1 \equiv \frac{1}{3}C_1)$$

- Lösung: $y(x) = \underbrace{\frac{1}{4}e^{2x}}_{y_p} + \underbrace{\hat{C}_1 e^x + C_2 e^{-2x}}_{y_h}$

Die lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Auffinden der Partikulärlösung y_p

$$ay'' + by' + cy = F(x)$$

2. Verfahren: Variation der Konstanten

1. Schritt: homogene Differentialgleichung

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

2. Schritt: Variation der Konstanten

$$c_1 \rightarrow u(x), \quad c_2 \rightarrow v(x)$$

Ansatz: $y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$

$$y_p' = u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'$$

$$y_p'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + v''y_2 + 2v'y_2' + vy_2''$$

$$\begin{aligned} & a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + v''y_2 + 2v'y_2' + vy_2'') \\ & + b(u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2') \\ & + c(uy_1 + vy_2) = F(x) \end{aligned}$$

\downarrow \downarrow
 $= 0$ $= 0$
(homogene Gleichung)

$$\begin{aligned} & a(u''y_1 + 2u'y_1' + v''y_2 + 2v'y_2') \\ & + b(u'y_1 + v'y_2) = F(x) \end{aligned}$$

suchen spezielle Lösung

„Eichung“ $\underline{u'y_1 + v'y_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$

$$\rightarrow u''y_1 + u'y_1' + v''y_2 + v'y_2' = 0$$

$$\underline{u'y_1 + v'y_2} = \frac{1}{a} F(x)$$

algebraisches Gleichungssystem für u', v'

Lösung:
$$u' = -\frac{1}{a} F(x) \frac{y_2}{y_1 y_2' - y_2' y_1}$$

$$v' = \frac{1}{a} F(x) \frac{y_1}{y_1 y_2' - y_2' y_1}$$

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

Beispiel: $y'' + y' - 2y = e^{2x}$

homogene Gleichung. Fundamentallösungen

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-2x} \\ y_1' = e^x, \quad y_2' = -2e^{-2x} \end{array} \right\} W(y_1, y_2; x) = -3e^{-x}$$

hier: $a=1, F(x) = e^{2x}$

$$\frac{du}{dx} = -e^{2x} \frac{e^{-2x}}{-3e^{-x}} = \frac{1}{3}e^x \rightarrow u(x) = \frac{1}{3}e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = e^{2x} \frac{e^x}{-3e^{-x}} = -\frac{1}{3}e^{4x} \rightarrow v(x) = -\frac{1}{12}e^{4x}$$

Partikulärlösung:

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \frac{1}{3}e^{2x} + \left(-\frac{1}{12}\right)e^{2x}$$

$$y_p = \frac{1}{4}e^{2x}$$

allgemeine Lösung:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

Die lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Auffinden der Partikulärlösung y_p

$$ay'' + by' + cy = F(x)$$

3. Verfahren: Methode der unbestimmten Koeffizienten
(spezielle Ansätze)

a) Inhomogenität ist Polynom: $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

Ansatz: $y_p = \alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_nx^n$, gleiches n

Einsetzen in Differentialgleichung

Koeffizientenvergleich $\rightarrow \alpha_k$

Beispiel: $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2x = g$, gedämpfte Schwingungen
mit Schwerkraft

$$F(t) = g = a_0, \quad n=0$$

Ansatz: $x_p = \alpha_0$

$$\dot{x}_p = 0, \quad \ddot{x}_p = 0$$

$$\rightarrow \omega_0^2 x_p = g$$

$$x_p = \frac{g}{\omega_0^2}$$

anderes Verfahren:

neue Variable $x = \xi - \xi_0$

$$\dot{x} = \dot{\xi}$$

$$\ddot{x} = \ddot{\xi}$$

in Differentialgleichung:

$$\ddot{\xi} + \beta\dot{\xi} + \omega_0^2(\xi - \xi_0) = g$$

\rightarrow homogene Gleichung für $\xi_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$

neue Ruhelage $x_p = -\xi_0$

b) Inhomogenität ist Exponentialfunktion

$$F(x) = Ae^{\rho x}$$

Ansatz: $y_p = \alpha e^{\rho x}$, gleiches ρ

$$y_p' = \alpha \rho e^{\rho x}$$

$$y_p'' = \alpha \rho^2 e^{\rho x}$$

in Differentialgleichung:

$$(a \cdot \alpha \rho^2 + b \cdot \alpha \rho + c \alpha) e^{\rho x} = A e^{\rho x}$$

$$\alpha = \frac{A}{a \rho^2 + b \rho + c}$$

Beispiel: $y'' + y' - 2y = e^{2x}$, $a=b=1$
 $c=-2$

$$A=1$$

$$\rho=2$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$
$$y_p = \frac{1}{4} e^{2x}$$

c) Inhomogenität ist sin- und cos-Funktion

$$F(x) = a_1 \cos \rho x + a_2 \sin \rho x$$

Ansatz: $y_p = \alpha_1 \cos \rho x + \alpha_2 \sin \rho x$, gleiches ρ

$$y_p' = -\alpha_1 \rho \sin \rho x + \alpha_2 \rho \cos \rho x$$

$$y_p'' = -\alpha_1 \rho^2 \cos \rho x - \alpha_2 \rho^2 \sin \rho x$$

in Differentialgleichung:

$$[-a \cdot \alpha_1 \rho^2 + b \cdot \alpha_2 \rho + c \cdot \alpha_1] \cos \rho x +$$

$$[-a \cdot \alpha_2 \rho^2 - b \cdot \alpha_1 \rho + c \cdot \alpha_2] \sin \rho x$$

$$= a_1 \cos \rho x + a_2 \sin \rho x$$

Koeffizientenvergleich \rightarrow algebraisches Gleichungssystem
für α_1, α_2

$$\alpha_1 (c - a \rho^2) + \alpha_2 \cdot b \rho = a_1$$

$$-\alpha_1 \cdot b \rho + \alpha_2 (c - a \rho^2) = a_2$$

Anmerkung: Inhomogenität Lösung der homogenen Gleichung

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda_2\right)y = e^{\rho x} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynom}}}{P_n(x)}$$

$$\text{Ansatz: } \begin{cases} e^{\rho x} \cdot Q_n(x) & , \rho \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x e^{\rho x} \cdot Q_n(x) & , \rho = \lambda_1 \text{ oder } \rho = \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x^2 e^{\rho x} \cdot Q_n(x) & , \rho = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Ungedämpfte erzwungene Schwingungen

Wiederholung: $F(x) = a_1 \cos \varrho x + a_2 \sin \varrho x$

$$y_p = \alpha_1 \cos \varrho x + \alpha_2 \sin \varrho x$$

$$\alpha_1 (c - a\varrho^2) + \alpha_2 \cdot b\varrho = a_1$$

$$-\alpha_1 \cdot b\varrho + \alpha_2 (c - a\varrho^2) = a_2$$

Erzwungene Schwingungen

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t ; f_0 = \frac{F_0}{m}$$

→ $a=1, b=\beta, c=\omega_0^2, \omega_0$: Eigenfrequenz

$a_1=f_0, a_2=0, \varrho=\omega, \omega$: Erregerfrequenz

keine Reibung: $b=\beta=0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1 (\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \\ \alpha_2 (\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{array} \right. \rightarrow \alpha_1 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$
$$\rightarrow \alpha_2 = 0$$

Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

Diskussion:

- $\omega \ll \omega_0$: $x_p = \frac{f_0}{\omega_0^2} \cos \omega t, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Amplitude: bestimmt durch elastische Bindung

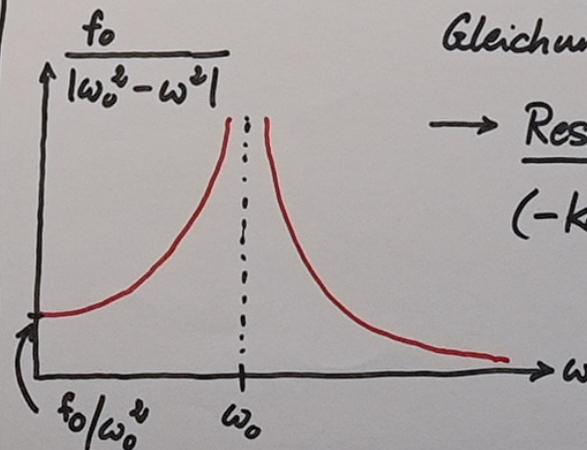
- $\omega \gg \omega_0$: $x_p = -\frac{f_0}{\omega^2} \cos \omega t$

Amplitude: elastische Bindung spielt keine Rolle

- $\omega = \omega_0$: Lösungsverfahren versagt

$f_0 \cos \omega t$ ist Lösung der homogenen Gleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

→ Resonanz
(-katastrophe)



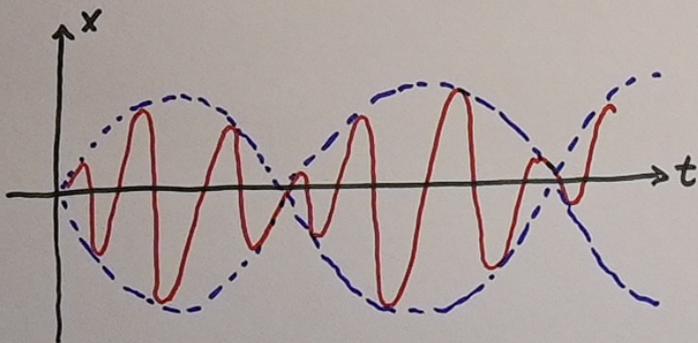
allgemeine Lösung:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

spezielle Anfangsbedingungen: $x(0) \stackrel{!}{=} 0 = A + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow A = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$

$$\dot{x}(0) \stackrel{!}{=} 0 = B \omega_0 \rightarrow B = 0$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$
$$= \left[\frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right] \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \quad (\text{Additionstheoreme})$$



(Amplituden-) Modulation

Schwebung

$\frac{\omega_0 - \omega}{2}$: „Dissonanz“

Amplitude [...] bei Resonanz:

$$\frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t = \frac{2f_0}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t$$
$$= \frac{f_0 t}{\omega_0 + \omega} \left[\frac{2}{(\omega_0 - \omega)t} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right] \xrightarrow{\omega = \omega_0} \frac{f_0 t}{2\omega_0}, \text{ linear in } t$$

Gedämpfte erzwungene Schwingungen

Niederholung: $F(x) = a_1 \cos \varrho x + a_2 \sin \varrho x$

$$y_p = \alpha_1 \cos \varrho x + \alpha_2 \sin \varrho x$$

$$\begin{cases} \alpha_1 (c - a\varrho^2) + \alpha_2 \cdot b\varrho = a_1 \\ -\alpha_1 \cdot b\varrho + \alpha_2 (c - a\varrho^2) = a_2 \end{cases}$$

Erzwungene Schwingungen

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

→ $a=1, b=\beta, c=\omega_0^2, \omega_0$: Eigenfrequenz
 $a_1=f_0, a_2=0, \varrho=\omega, \omega$: Erregerfrequenz

$$\underline{b=\beta \neq 0}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + \alpha_2 \cdot \beta\omega = f_0 \\ -\alpha_1 \beta\omega + \alpha_2 (\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Lösungen: $\alpha_1 = \frac{f_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}, \alpha_2 = \frac{f_0 \beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}$

Partikulärlösung:

$$x_p = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \beta \omega \sin \omega t \right]$$

allgemeine Lösung: $x = x_h + x_p$

in x_h : Dämpfung $e^{-\frac{\beta}{2}t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Einschwingvorgang, Abklingen auf $\frac{1}{e}$

→ Diskussion von x_p

$$x_p = \alpha \cos(\omega t - \theta) = \alpha (\cos \theta \cos \omega t + \sin \theta \sin \omega t)$$

Vergleich:

$$\alpha \cos \theta = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} (\omega_0^2 - \omega^2)$$

$$\alpha \sin \theta = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2} \beta \omega$$

Resultat:

$$x_p = \frac{f_0}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}_{\alpha}} \cos(\omega t - \theta)$$

$$\tan \theta = \frac{\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\sin \theta = \frac{\beta \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}$$

im eingeschwungenen Zustand: wie harmonischer Oszillator (als ob $k = m\omega^2$)

Diskussion der Amplitude

$$\alpha(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}$$

- keine Nullstellen

- $\alpha(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$, $\alpha \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} +0$

Extremwert:

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = -\frac{1}{2} f_0 \frac{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\beta^2 \omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2]^{3/2}} \stackrel{!}{=} 0$$

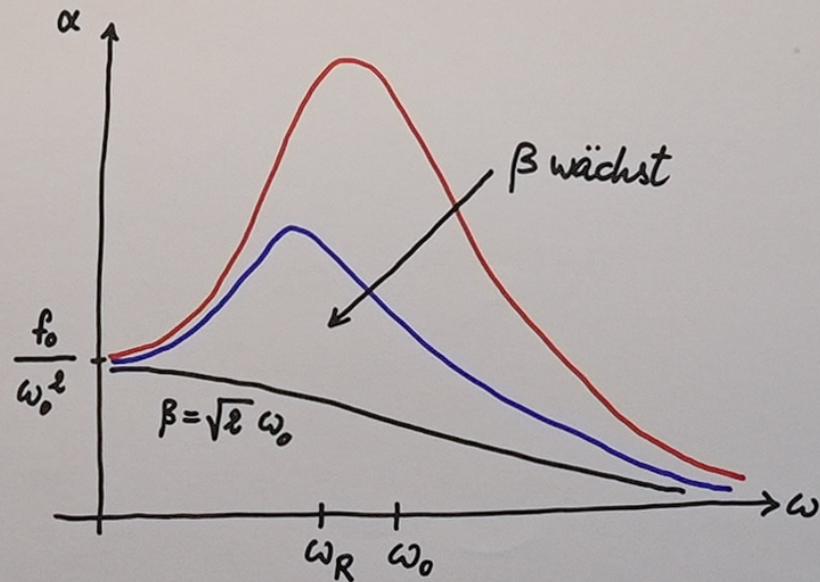
$$\begin{aligned} \rightarrow \beta^2 - 2(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Bedingung für Extremwert: $\beta \leq \sqrt{2} \cdot \omega_0$

Frequenz: $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}} < \omega_0$, Resonanzfrequenz

Maximum der Amplitude:

$$\alpha(\omega_R) = \frac{f_0}{\beta \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \infty$$



Diskussion der Phasenverschiebung

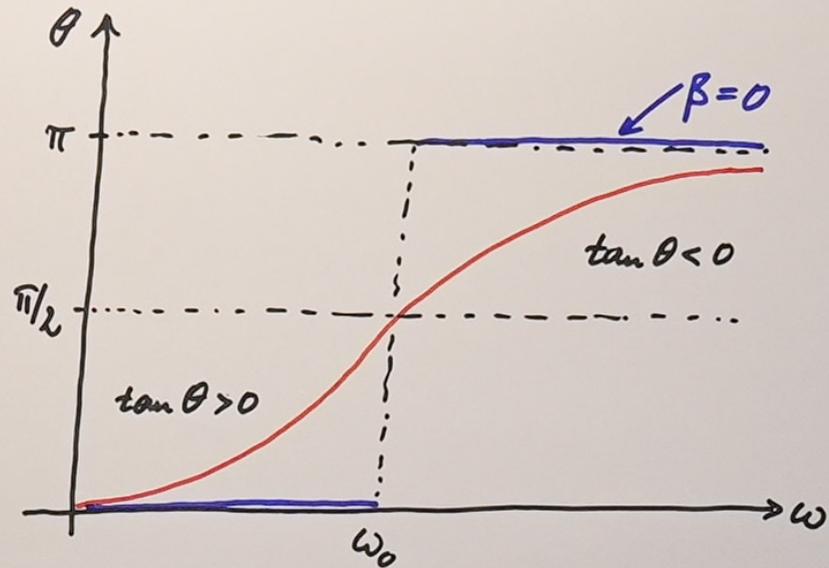
$$\theta(\omega) = \arctan \frac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{spezielle Werte: } \omega = 0 \rightarrow \theta = 0 \\ \omega = \omega_0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ \omega \rightarrow \infty \rightarrow \theta \rightarrow \pi \end{array} \right\} \theta \geq 0$$

Frage: zu welchen Zeiten erreichen Erregerkraft und Schwingung ein und dieselbe Phase ϕ (z.B. Maximum)?

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{Erregerkraft}} \quad \omega t_E \stackrel{!}{=} \phi \\ \underline{\text{Schwingung}} \quad \omega t_S - \theta \stackrel{!}{=} \phi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega t_S - \theta = \omega t_E \\ t_S = t_E + \frac{\theta}{\omega} \geq t_E \\ (\text{da } \theta \geq 0) \end{array}$$

Schwingung hat gleiche Phase nach Erregerkraft.



Potenzreihen-Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Beispiel: Typ „harmonischer Oszillator“

$$\underline{y'' + \omega^2 y = 0}$$

Fundamentallösungen: $y_1 = \cos \omega x$, $y_2 = \sin \omega x$

Reihenansatz (Frobenius-Reihe)

$$y = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda+1} + a_2 x^{\lambda+2} + \dots$$

$(a_0 \neq 0)$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k) a_k x^{\lambda+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1) a_k x^{\lambda+k-2}$$

unbekannt: λ , a_k

in Differentialgleichung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1) a_k x^{\lambda+k-2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = 0$$

Ziel: gleiche x -Potenzen

→ in erster Summe:

1.) Indextransformation

$$\boxed{k-2 = n}$$

(Summationsgrenzen!)

$$\underline{k-2 = n}$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (\lambda+n+2)(\lambda+n+1)a_{n+2} x^{n+2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = 0$$

2. n „stummer Index“

Umbenennung $n \rightarrow k$

$$\sum_{k=-2}^{\infty} (\lambda+k+2)(\lambda+k+1)a_{k+2} x^{k+2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = 0$$

3. $k=-2, -1$: schreiben Summanden auf

$$\lambda(\lambda-1)a_0 x^{\lambda-2} + (\lambda+1)\lambda a_1 x^{\lambda-1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)a_{k+2} + \omega^2 a_k] x^{\lambda+k} = 0$$

4. Koeffizientenvergleich

$$\underline{x^{\lambda-2}}: \lambda(\lambda-1) \stackrel{!}{=} 0, (a_0 \neq 0)$$

Indexgleichung

$$\rightarrow \lambda=0, \lambda=1$$

$$\underline{x^{\lambda-1}}: \lambda(\lambda+1)a_1 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \lambda=1: a_1=0$$

$$\rightarrow \lambda=0: a_1 \text{ beliebig}$$

wählen $a_1=0$

$$\underline{x^{\lambda+k}}: (\lambda+k+2)(\lambda+k+1)a_{k+2} + \omega^2 a_k = 0$$

$$a_{k+2} = - \frac{\omega^2}{(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)} a_k$$

Rekursionsformel

$a_1=0 \rightarrow$ nur Koeffizienten mit geradzahigen Indizes

$$\underline{a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)} a_k}$$

$$\boxed{\lambda=0}$$

$$a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+2)(k+1)} a_k$$

$$\underline{k=0}: a_2 = -\frac{\omega^2}{2} a_0$$

$$\underline{k=2}: a_4 = -\frac{\omega^2}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{\omega^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

$$\underline{k=4}: a_6 = -\frac{\omega^2}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{\omega^6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

⋮

vollständige Induktion



$$\underline{a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} a_0}$$

$$\boxed{\lambda=1}$$

$$a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+3)(k+2)} a_k$$

$$\underline{k=0}: a_2 = -\frac{\omega^2}{3 \cdot 2} a_0$$

$$\underline{k=2}: a_4 = -\frac{\omega^2}{5 \cdot 4} a_2 = \frac{\omega^4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

$$\underline{k=4}: a_6 = -\frac{\omega^2}{7 \cdot 6} a_4 = -\frac{\omega^6}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

⋮

vollständige Induktion



$$\underline{a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0}$$

Lösung:

$\lambda=0$:

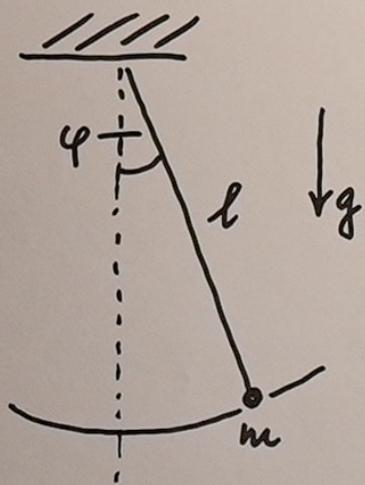
$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\omega x)^{2n}$$
$$= a_0 \left[1 - \frac{1}{2} (\omega x)^2 + \frac{1}{24} (\omega x)^4 - + \dots \right] = a_0 \cos \omega x$$

$\lambda=1$:

$$y = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{a_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\omega x)^{2n+1}$$
$$= \frac{a_0}{\omega} \left[\omega x - \frac{1}{6} (\omega x)^3 + \frac{1}{120} (\omega x)^5 - + \dots \right] = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega x$$

Nichtlineare Pendelschwingungen

I - Schwach anharmonische Pendelschwingungen



Fadenpendel
Kreispendel
mathematisches Pendel

$$m l \ddot{\varphi} + m g \sin \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Kleine Auslenkungen: $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\varphi \ll 1$$

$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$, harmonische Schwingungen

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varepsilon}{6} \varphi^3, \quad (\varepsilon = 1)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\varepsilon}{6} \omega_0^2 \varphi^3$$

Lösung durch Reihenentwicklung:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \quad | \quad \varphi^3 = \varphi_0^3 + 3\varepsilon \varphi_0^2 \varphi_1 + \dots$$

Anfangsbedingungen: $t = 0$

$$\varphi_0(0) = \varphi_{\max} \quad (\text{Winkelamplitude})$$

$$\dot{\varphi}_0(0) = 0$$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0$$

Einsetzen in Differentialgleichung:

$$(\ddot{\varphi}_0 + \varepsilon \ddot{\varphi}_1) + \omega_0^2 (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1) = \frac{\varepsilon}{6} \omega_0^2 (\varphi_0^3 + 3\varepsilon \varphi_0^2 \varphi_1)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underline{\varepsilon^0}: \quad \ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = 0, \quad \text{harmonische Schwingungen}$$

$$\text{Lösung: } \varphi_0 = \varphi_{\max} \cos \omega_0 t$$

$$\underline{\varepsilon^1}: \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi_0^3$$

$$\varphi_0 = \varphi_{\max} \cos \omega_0 t$$

↓

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= \frac{1}{6} \omega_0^2 \cdot \varphi_{\max}^3 \cos^3 \omega_0 t \\ &= \frac{1}{24} \omega_0^2 \varphi_{\max}^3 (\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t) \end{aligned}$$

Superpositionsprinzip

$$\varphi_1 = \varphi_{11h} + \varphi_{11p}^{(I)} + \varphi_{11p}^{(II)}$$

$$\varphi_{11p}^{(I)} = -\frac{1}{192} \varphi_{\max}^3 \cos 3\omega_0 t$$

$$\varphi_{11p}^{(II)} = \frac{1}{16} \varphi_{\max}^3 (\omega_0 t \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t)$$

|
säkularer Term

Versuch einer Lösung:

$$\text{Frequenz: } \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1 + \dots$$

fassen φ als Funktion von ωt auf

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{d(\omega t)} \equiv \varphi'$$

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \frac{d^2\varphi}{d(\omega t)^2} = \omega^2 \varphi'' = (\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1) \varphi''$$

Einsetzen in Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1) (\varphi_0'' + \varepsilon \varphi_1'') + \omega_0^2 (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1) \\ = \frac{\varepsilon}{6} \omega_0^2 (\varphi_0^3 + 3\varepsilon \varphi_0^2 \varphi_1) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underline{\varepsilon^0}: \varphi_0'' + \varphi_0 = 0 \rightarrow \ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = 0$$

$$\text{Lösung: } \varphi_0 = \varphi_{\max} \cos \omega_0 t$$

ε^1 :

$$\varphi_1'' + \varphi_1 = \frac{1}{6} \varphi_0^3 + 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \varphi_0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi_{\max}^3 \cos^3 \omega_0 t + 2 \omega_0 \omega_1 \varphi_{\max} \cos \omega_0 t$$

$$= \frac{1}{24} \omega_0^2 \varphi_{\max}^3 \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{8} \omega_0 \varphi_{\max} \underbrace{(\omega_0 \varphi_{\max}^2 + 16 \omega_1)}_{\stackrel{!}{=} 0} \cos \omega_0 t$$

Vermeiden säkularen Term: $\omega_1 = -\frac{1}{16} \omega_0 \varphi_{\max}^2$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \varphi_{\max}^2\right), \quad \underline{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_{\max}^2\right)}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{192} \varphi_{\max}^3 (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t), \text{ konvergiert}$$

abhängig von Amplitude
 φ_{\max} — anharmonische
Schwingung

Nichtlineare Pendelschwingungen

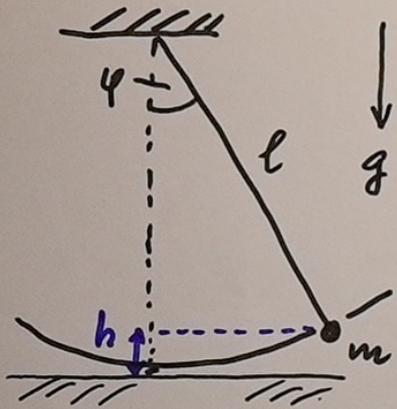
II - Fadenpendel mit beliebig großen Ausschlägen

$$m l \ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0$$

„Methode Energiesatz“

$$\frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mg l (1 - \cos \varphi) = mg l (1 - \cos \varphi_{\max})$$

$$\dot{\varphi}|_{\varphi_{\max}} = 0$$



Bahngeschwindigkeit $l \dot{\varphi}$

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_{\max})}, \text{ erstes Integral}$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}}, \text{ implizite Lösung}$$

$$\text{Schwingungsdauer: } T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_{\max}}}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \cos\varphi - \cos\varphi_{\max} &= \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}\right) \\ &= 2\left(\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

2) Modul

$$k \equiv \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}$$

neue Variable u

$$\sin\frac{\varphi}{2} \equiv k \sin u$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \cos\varphi - \cos\varphi_{\max} &= 2\left(k^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2k^2(1 - \sin^2 u) \\ &= 2k^2 \cos^2 u \end{aligned}$$

$$k \cos u \, du = \frac{1}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \, d\varphi$$

Integrationsgrenzen: $\varphi=0 \rightarrow u=0$
 $\varphi=\varphi_{\max} \rightarrow u=\frac{\pi}{2}$

$$4) \quad T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{k \cos u \, du}{\frac{1}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{2} k \cos u}$$

$$= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

$K(k)$ vollständiges elliptisches
Integral 1. Gattung

$$= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K(k)$$

$$\underline{T = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} K(k)}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} K(k) \quad , \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{harmonische Schwingung}$$

$$k = \sin \frac{\varphi_{\max}}{2}$$

φ_{\max}	6°	10°	40°	90°	180°
$\frac{2}{\pi} K(k)$	1,000703	1,001912	1,031324	1,180357	∞

Diskussion:

1) Schwingungsdauer hängt von Amplitude ab
 \rightarrow anharmonisch

2) $T \approx T_0$ für $\varphi_{\max} \lesssim 10^\circ$

3) Reihendarstellung von $K(k)$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right)$$

$$\varphi_{\max} \ll 1 \rightarrow \sin \varphi_{\max} \approx \varphi_{\max}$$

$$k \approx \frac{1}{2} \varphi_{\max}$$

$$\underline{T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_{\max}^2 \right)}$$

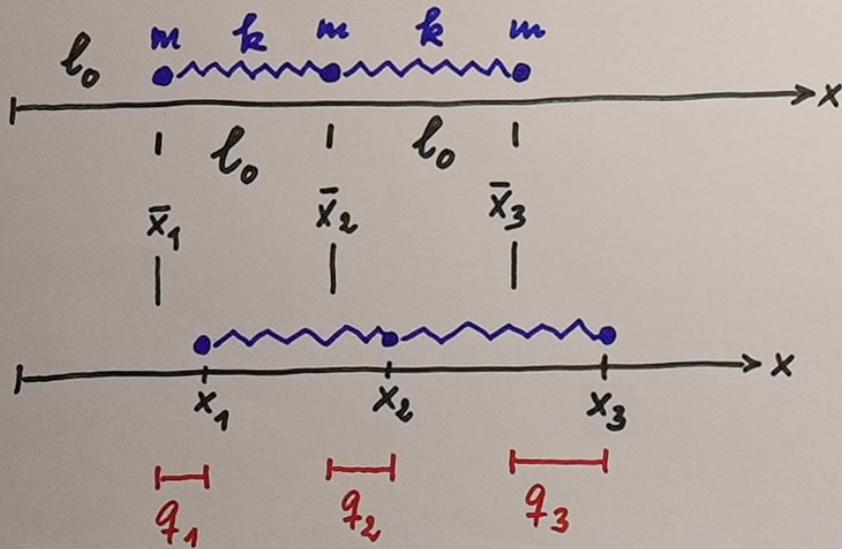
4) $\varphi_{\max} = 180^\circ$

„Kriechbewegung“ auf die instabile Gleichgewichtslage zu

Systeme von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die lineare Oszillatorkette

Aufstellung der Differentialgleichungen



Entspannte Federn

$$\text{Ruhelegen: } \bar{x}_j = j \cdot l_0, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\text{Federlängen: } l_0 = \bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j$$

Gedehnte Federn

$$\text{Koordinaten } x_j = \bar{x}_j + q_j$$

$$\text{Federlängen } l_j = x_{j+1} - x_j = l_0 + (q_{j+1} - q_j)$$

$$\text{Dehnung } l_j - l_0 = q_{j+1} - q_j$$

Hooke'sches Gesetz:

$$m \ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1) \quad (\text{nach rechts})$$

$$m \ddot{q}_2 = -k(q_2 - q_1) + k(q_3 - q_2) = k(q_3 - 2q_2 + q_1)$$

(nach links) (nach rechts)

$$m \ddot{q}_3 = -k(q_3 - q_2) \quad (\text{nach links})$$

Verallgemeinerung:

$$m\ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1)$$

⋮

$$m\ddot{q}_j = k(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1})$$

⋮

$$m\ddot{q}_n = k(q_{n-1} - q_n)$$

n gekoppelte Differentialgleichungen
 $2n$ Integrationskonstanten

Beispiel: $n=2$

$$m\ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1)$$

$$m\ddot{q}_2 = k(q_1 - q_2)$$

"+" $m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = 0 \rightarrow q_1 + q_2 = At + B$

"-" $m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -2k(q_1 - q_2)$
 $\rightarrow q_1 - q_2 = C \cos \omega t + D \sin \omega t$
 $\omega^2 = \frac{2k}{m}$

Lösung: $q_1 = \frac{1}{2}(At + B + C \cos \omega t + D \sin \omega t)$

$$q_2 = \frac{1}{2}(At + B - C \cos \omega t - D \sin \omega t)$$

Anfangsbedingungen: $q_1(0) = q_2(0) = 0$

$$\dot{q}_1(0) = v_0, \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

$$\rightarrow B = C = 0, \quad A = v_0, \quad D = \frac{v_0}{\omega}$$

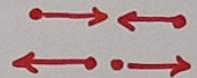
Lösung: $x_1 = l_0 + q_1 = l_0 + \frac{v_0}{2}t + \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t$

$$x_2 = 2l_0 + q_2 = 2l_0 + \frac{v_0}{2}t - \frac{v_0}{2\omega} \sin \omega t$$

Ruhelagen

geradlinig-
gleichförmige
Translation

harmonische
Schwingungen



nochmals $n=2$:

$$\text{Synchronansatz: } \begin{cases} q_1 = a_1 \cos \omega t \\ q_2 = a_2 \cos \omega t \end{cases} \parallel$$

(gleiches ω)

$$\left. \begin{cases} m\ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1) \\ m\ddot{q}_2 = k(q_1 - q_2) \end{cases} \right\} \begin{cases} -a_1 m \omega^2 = k(a_2 - a_1) \\ -a_2 m \omega^2 = k(a_1 - a_2) \end{cases}$$

Abkürzung: $\kappa \equiv \frac{m\omega^2}{k}$

$$\begin{cases} (1-\kappa)a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + (1-\kappa)a_2 = 0 \end{cases} \parallel$$

unbekannt: a_1, a_2

Lösbarkeitsbedingung:

$$\begin{vmatrix} 1-\kappa & -1 \\ -1 & 1-\kappa \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0, \text{ Säkular determinante}$$

$$(1-\kappa)^2 - 1 = 0, \text{ charakteristische Gleichung}$$

Lösungen: $\kappa_1 = 0 \rightarrow \omega_1 = 0$
 $\kappa_2 = 2 \rightarrow \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$ Eigenfrequenzen

$$\kappa_1 = 0: a_1 = a_2$$

$$\kappa_2 = 2: a_1 = -a_2$$

- Komponenten eines (n -dim.) Vektors
- normieren Vektor

$$\vec{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalschwingg.
des Systems



Translation

$$\omega_1 = 0$$



Schwingung

$$\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$$

Auslenkungen $q_j(t)$ der einzelnen Massenpunkte sind Linearkombinationen der Normalschwingungen.

$$q_1 = e_1^{(1)} \left(A_1 \cos \omega_1 t + \frac{B_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + e_1^{(2)} \left(A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \right)$$

$$q_2 = e_2^{(1)} \left(A_1 \cos \omega_1 t + \frac{B_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + e_2^{(2)} \left(A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \right)$$

$$\uparrow$$
$$\frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \xrightarrow{\omega_1 \rightarrow 0} 1$$

Resultat: $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 + B_1 t) + \frac{1}{\sqrt{2}} (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t)$ \parallel
 $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 + B_1 t) - \frac{1}{\sqrt{2}} (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t)$ \parallel

Einführungsbeispiel: $n=3$

$$\begin{array}{l}
 m\ddot{q}_1 = k(q_2 - q_1) \\
 m\ddot{q}_2 = k(q_3 - 2q_2 + q_1) \\
 m\ddot{q}_3 = k(q_2 - q_3)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Synchron-} \\
 \text{ansatz} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (1-\kappa)a_1 - a_2 = 0 \\
 -a_1 + (2-\kappa)a_2 - a_3 = 0 \\
 -a_2 + (1-\kappa)a_3 = 0
 \end{array}$$

charakteristische Gleichung: $\kappa(1-\kappa)(\kappa-3) = 0$

$$\begin{array}{ll}
 \kappa_1 = 0 & \omega_1 = 0 \\
 \kappa_2 = 1 & \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \kappa_3 = 3 & \omega_3 = \sqrt{3 \frac{k}{m}}
 \end{array}$$

Resultat: Normalschwingungen

$$\vec{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{e}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

